

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# Formulações de Poisson para Sistemas Dinâmicos \*

Fernando Haas

Dissertação realizada sob a orientação do Dr. João Goedert e apresentada no Instituto de Física da UFRGS, em preenchimento final dos requisitos do título de mestre em Física.

Porto Alegre, agosto de 1994

---

\* Trabalho financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e pela Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS).

## Agradecimentos.

Agradeço ao meu orientador João Goedert, pelas idéias criativas e incentivo à independência científica; à professora Ruth Schneider, que, sem nada pedir em troca, prestou ajuda decisiva; à minha companheira Eloisa Tschoepke, pela solidariedade e compreensão; aos colegas Elton Rossini, Gilberto Corso, Joecir Palandi, Martin Fleck, Paulo Kuhn e Renato Pakter, por várias discussões agradáveis e produtivas; à minha família, pelo apoio em todas as horas; ao professor Luiz Fernando Ziebell e ao colega Rudi Gaezler, por valiosos esclarecimentos sobre o uso de recursos computacionais; aos funcionários da Biblioteca de Física da UFRGS, pelo atendimento cordial e correto; ao meu professor do segundo grau Luís Fernando Sá, por haver despertado em mim a paixão pela Física; e, finalmente, a todos os demais que de um jeito ou de outro contribuíram para este trabalho.

## ÍNDICE

1. <i>Introdução</i> . . . . .	2
2. <i>Geometria Diferencial</i> . . . . .	7
2.1 Variedades . . . . .	8
2.2 Vetores Tangentes . . . . .	10
2.3 Vetores Cotangentes . . . . .	14
2.4 Tensores . . . . .	16
2.5 Formas Exteriores . . . . .	17
2.6 Campos Vetoriais e Transformações . . . . .	21
3. <i>Sistemas de Poisson</i> . . . . .	29
3.1 Sistemas de Poisson . . . . .	29
3.2 Teoria de Transformação . . . . .	39
3.3 Mecânica de Nambu e Quantização . . . . .	43
3.4 Estabilidade e Formulações de Poisson . . . . .	49
3.5 O Problema Inverso da Mecânica . . . . .	56
4. <i>Formulações de Poisson para Sistemas Dinâmicos</i> . . . . .	64
4.1 Caminhos que conduzem a Descrições de Poisson . . . . .	64
4.2 Teoria Básica . . . . .	71

4.3	O Caso Tridimensional . . . . .	75
4.4	Invariância Conforme da Identidade de Jacobi a Três Dimensões	79
5.	<i>Formulações de Poisson Tridimensionais: Exemplos</i> . . . . .	86
5.1	Patim no Gelo . . . . .	87
5.2	Carga irradiando sob a Ação de um Campo Elétrico Constante	91
5.3	O Corpo Rígido Livre . . . . .	94
5.4	Sistema de Lorenz Reescalonado . . . . .	96
5.5	Sistema Reduzido de três Ondas Reescalonado . . . . .	102
5.6	Sistema de Rabinovich Reescalonado . . . . .	107
5.7	Sistema de Lotka-Volterra Tridimensional . . . . .	110
6.	<i>Conclusão</i> . . . . .	119

## RESUMO

É considerado o problema de encontrar descrições de Poisson (formulações Hamiltonianas generalizadas) associadas a modelos físicos. Aspectos básicos e aplicações dos sistemas de Poisson são explanados utilizando a linguagem da geometria diferencial. Sobre geometria diferencial, consta um capítulo com noções fundamentais. São consideradas as Mecânicas de Nambu e Birkhoff e suas relações com a Mecânica Hamiltoniana generalizada. A questão da estabilidade é discutida do ponto de vista das formulações de Poisson. Os métodos existentes atualmente para derivação de estruturas Hamiltonianas generalizadas são expostos. Em particular, o processo de redução é estudado. Propõe-se uma abordagem dedutiva e inédita para construção de formulações de Poisson. O novo método é capaz de resolver (localmente) a questão de como encontrar descrições Hamiltonianas de sistemas dinâmicos com no máximo três dimensões. Nos casos tridimensionais nos quais é conhecida uma superfície à qual as trajetórias são sempre tangentes, a nova estratégia reduz esta questão à solução de uma equação diferencial parcial de primeira ordem linear. Deste modo demonstra-se a existência (local) genérica de estruturas de Poisson para sistemas tridimensionais. O caso tridimensional é analisado com detalhe, particularmente no concernente à invariância conforme da identidade de Jacobi nesta dimensionalidade. A abordagem tratada nesta dissertação é aplicada a vários sistemas tridimensionais de interesse.

Generalizam-se ou são descobertas diversas formulações Hamiltonianas não canônicas graças ao novo método. Os modelos tratados são o corpo rígido livre, o sistema não-holônomo de um patim para gelo, o sistema dissipativo de uma carga irradiando enquanto executa um movimento unidimensional sob a ação de um campo elétrico constante, certos sistemas reescalados de Lorenz e de interação ressonante de três ondas e o modelo tridimensional de Lotka-Volterra.

## ABSTRACT

The problem of finding Poisson descriptions (generalized Hamiltonian formulations) associated with physical models is considered. The basic features and applications of Poisson systems are explained in the language of differential geometry. One chapter is included with the fundamental notions on differential geometry. The Nambu and Birkhoff's Mechanics and their relationship with the generalized Hamiltonian Mechanics are considered. The question of stability is discussed from the point of view of the Poisson formulations. The currently existing methods for derivation of generalized Hamiltonian structures are reviewed. Particularly, the reduction process is analyzed. A deductive approach is proposed for the construction of Poisson formulations. The new method can solve (locally) the question of how to find Hamiltonian descriptions of dynamical systems in, at most, three dimensions. When a surface to which the motion is always tangent is known, in three dimensions the new approach reduces the problem to the solution of a linear partial differential equation of first order. This demonstrates the general existence (local) of Poisson structures for tridimensional systems. The tridimensional case is analyzed in detail, particularly in what concerns the conformal invariance of the Jacobi identity in this dimensionality. The approach proposed in this dissertation is applied to various tridimensional systems of interest. The method both generalizes and discovers several new noncanonical Hamiltonian

formulations. The models treated are the free rigid body, the nonholonomic system of the ice skate, the dissipative system of a charge in one dimension radiating under the action of a constant electric field, some rescaled Lorenz systems, the reduced three-wave interaction system, and the tridimensional Lotka-Volterra system.

## Capítulo 1

### INTRODUÇÃO

Desde o advento da Mecânica Quântica, as formulações Hamiltonianas desempenham um papel central na Física Teórica. Atualmente, a tendência é a intensificação dos estudos sobre sistemas Hamiltonianos. A razão é o surgimento relativamente recente da geometria diferencial como método de trabalho na Física, após a década de sessenta. A formulação de problemas físicos na linguagem independente de coordenadas, própria da geometria diferencial atual, abriu um horizonte amplo para a aplicação de métodos Hamiltonianos. Para tanto, é preciso explorar toda a potencialidade geométrico-algébrica do formalismo Hamiltoniano. Realmente, na Mecânica Hamiltoniana tradicional, ou canônica, pressupõe-se a existência de coordenadas especiais, ditas canônicas. Isto restringiu muito a classe de problemas tratáveis. No entanto, do ponto de vista geométrico, a Mecânica Hamiltoniana não requer coordenadas privilegiadas. Os objetos básicos são um *colchete de Poisson* e um *Hamiltoniano*. Algumas vezes, as teorias Hamiltonianas geométricas são chamadas *teorias Hamiltonianas generalizadas*, ou *não canônicas*. Utilizaremos as designações *formulações de Poisson*, ou, simplesmente, *formulações Hamiltonianas* (quando não houver risco de confusão). Basicamente, a grande vantagem das formulações de Poisson é sua extrema

concisão. Toda a informação sobre os sistemas de Poisson está contida meramente no colchete de Poisson e no Hamiltoniano. Vale lembrar que uma das motivações históricas do surgimento da Mecânica Hamiltoniana foi a busca de simplificação das teorias de perturbação na Mecânica Celeste. Ao invés de trabalhar com o conjunto das equações que modelam o sistema sob análise, é possível perfazer os cálculos necessários usando apenas dois objetos: o Hamiltoniano e o colchete de Poisson. Procedimentos analíticos tediosos e complexos, portanto, são minimizados e sistematizados em teorias Hamiltonianas. Além disso, a forma precisa da descrição Hamiltoniana frequentemente ajuda a entender diversos aspectos do sistema tratado. Por exemplo, simetrias (exatas ou aproximadas) subjacentes podem ser identificadas.

Os sistemas Hamiltonianos possuem diversas características comuns. Expansões assintóticas e aproximações que reduzem o número de graus de liberdade de sistemas Hamiltonianos distintos possuem interpretações comuns [1][2]. A identificação de semelhanças entre problemas físicos aparentemente díspares constitui uma importante tarefa. Neste sentido, as descrições de Poisson capacitam enquadrar num contexto unificado sistemas de tipos variados.

Existe um amplo espectro de aplicações das formulações de Poisson. Afora as já citadas, mencionaremos: a) a análise da estabilidade dos estados estacionários de sistemas Hamiltonianos [3]; b) a quantização de sistemas clássicos a partir da estrutura Hamiltoniana clássica [4] e c) a integração completa do sistema sob estudo a partir do conhecimento de duas formulações Hamiltonianas distintas [5]. Esta última aplicação envolve a construção de um operador de recorrência que permite gerar constantes de movimento umas

a partir das outras. A hierarquia de quantidades conservadas associadas a equação de Korteweg-de Vries, por exemplo, pode ser deduzida assim.

Recentemente descobriram-se estruturas de Poisson para um grande número de modelos. Citaremos a equação de Korteweg-de Vries [6], a Magneto-hidrodinâmica [3], as equações de Vlasov-Poisson e Vlasov-Maxwell [3], a Mecânica dos Fluidos em diversas aproximações [3], certos modelos biológicos [7][8] e a dinâmica de raios na Ótica de meios axisimétricos [9].

Por outro lado os correntes métodos para derivação de formulações Hamiltonianas não são sistemáticos; mesmo o importante processo de redução, discutido na seção 4.1, requer grande habilidade e intuição. O presente trabalho, então, volta-se basicamente à questão de *como* derivar formulações de Poisson a partir das equações de movimento. São considerados casos de dimensionalidade finita. A abordagem desta dissertação é completamente sistemática e dedutiva. Propostas *ad hoc* não são requeridas. Entretanto há um preço a pagar por esta simplicidade: apenas problemas de baixa dimensionalidade são garantidamente tratáveis. Mesmo assim, o método sugerido aqui resolve completamente o problema de encontrar descrições Hamiltonianas para sistemas tridimensionais. Este fato notável permitiu a generalização de resultados clássicos como a formulação de Poisson do corpo rígido livre devida a Arnold [10]. Também foram descobertas uma série de descrições de Poisson novas, associadas a vários sistemas importantes.

A dissertação está organizada como se segue:

No capítulo dois, são discutidos elementos de geometria diferencial, com vistas a geometrização da Mecânica Hamiltoniana. A ênfase está nos aspectos qualitativos dos conceitos expostos, sem pretensão de rigor matemático. Boa

parte das provas está omitida, e argumentos heurísticos tem um papel relevante. Este tipo de abordagem pode ser útil para o leitor sem treinamento em Geometria. Aspectos mais aprofundados dos assuntos tratados podem ser encontrados nas referências. Os tópicos analisados foram escolhidos em função de sua importância nas formulações Hamiltonianas geométricas. São eles: variedades, vetores tangentes e cotangentes, tensores, formas exteriores e campos vetoriais e transformações.

A formulação geométrica da Mecânica Hamiltoniana está exposta no capítulo três. A teoria de transformação subjacente é analisada. Após isto, é investigada a conexão entre estabilidade e descrições Hamiltonianas. Estão incluídas também seções sobre a Mecânica de Nambu e o Problema Inverso da Mecânica. A Mecânica de Nambu é um importante caso particular da Mecânica Hamiltoniana generalizada. O Problema Inverso da Mecânica está intimamente relacionado com a questão de como encontrar descrições de Poisson.

O capítulo quatro dedica-se ao método de dedução de estruturas Hamiltonianas proposto nesta dissertação. À guisa de introdução, são expostos sucintamente os métodos presentemente disponíveis, incluindo o processo de redução. A abordagem aqui proposta é estudada com detalhe no caso tridimensional. Conforme já foi mencionado, a estratégia adotada neste trabalho dá conta de forma exata dos problemas tridimensionais. Finalmente, este capítulo contém uma discussão sobre a invariância conforme dos sistemas Hamiltonianas tridimensionais. Esta é uma das peculiaridades geométricas mais significativas destes sistemas.

Uma série de exemplos de aplicação das técnicas desenvolvidas nesta dis-

sertação está no capítulo cinco. Especificamente, são construídas estruturas de Poisson para os seguintes modelos: o corpo rígido livre, o patim no gelo, uma carga em movimento unidimensional irradiando sob ação de um campo elétrico constante, um sistema de Lorenz reescalado, modelos reescalados reduzido e de Rabinovich para a interação ressonante de três ondas e, finalmente, o sistema de Lotka-Volterra tridimensional. Diversos resultados novos se fazem presentes ao longo deste capítulo.

O capítulo seis dedica-se a conclusão da dissertação, contendo um apanhado dos resultados obtidos e sugestões para trabalhos futuros.

## *Capítulo 2*

### GEOMETRIA DIFERENCIAL

Na Física, sempre se procura estabelecer as características intrínsecas dos sistemas sob estudo. As variáveis escolhidas para as descrições físicas são mera questão de conveniência, não possuindo valor em si mesmas. Nos cálculos práticos, que visam à obtenção de números testáveis experimentalmente, é que se faz uso de algum conjunto de coordenadas. Especificamente, na Mecânica Clássica adota-se um referencial, na Mecânica Quântica adota-se alguma base no espaço de Hilbert, e assim por diante. Não obstante, um requerimento filosoficamente natural é exigir que a estrutura das teorias físicas seja invariante frente a mudança de coordenadas. O modo mais direto de satisfazer-se este requerimento é formular a teoria sem mencionar coordenadas. Por exemplo, a Mecânica Hamiltoniana pode ser construída sem referência a sistemas de coordenadas. Mostraremos como isto é feito, recorrendo à geometria diferencial.

Neste capítulo, são expostos os conceitos matemáticos necessários à geometrização da Mecânica Hamiltoniana. O estilo é tão coloquial quanto possível. Outros enfoques ou detalhes técnicos podem ser encontrados nas referências [11]-[14]. Supomos que o leitor tem noções básicas de álgebra linear e cálculo diferencial. Os mapeamentos que surgirem serão tomados

como infinitamente diferenciáveis. É sub-entendida a convenção de soma de Einstein.

## 2.1 Variedades

O tema inicial são as *variedades diferenciáveis* (ou variedades, por brevidade). Serão tratadas sempre variedades  $M$  de dimensão  $n$ , finita. Essencialmente, variedades são espaços (conjuntos) localmente semelhantes ao  $R^n$  nos quais se pode estabelecer cálculo. Muitas vezes o físico trabalha com variedades sem o saber. O espaço de configuração de um sistema mecânico, por exemplo, é uma variedade. Neste caso, a totalidade das posições das partículas do sistema é um ponto (elemento) da variedade. O espaço dos estados de um sistema termodinâmico é outro exemplo de variedade.

Antes de mais nada, variedades são *espaços topológicos*. Ou seja, as idéias de vizinhança e mapeamento contínuo são aplicáveis. Espaços topológicos são mais gerais que espaços métricos. De fato, deve-se distinguir as noções abstratas de *vizinhança* e de *proximidade*, sendo a última aplicável apenas a espaços métricos [12].

As variedades podem ser definidas como espaços topológicos descritos por coordenadas. Para tanto, será melhor explicado o conceito de coordenada. *Carta* é uma dupla  $(O, \phi)$ , sendo  $O$  um aberto de  $M$ , que geralmente não é o próprio  $M$ , e  $\phi$  um homeomorfismo (mapeamento biunívoco contínuo de inversa contínua) entre  $O$  e um aberto de  $R^n$ . Seja  $\mathbf{p}$  um elemento de  $O$ . As funções  $x^\mu(\mathbf{p})$  dadas por  $(x^1(\mathbf{p}), \dots, x^n(\mathbf{p})) = \phi(\mathbf{p})$  são ditas *coordenadas* de  $\mathbf{p}$  na carta  $(O, \phi)$ .

Condições de regularidade geralmente impedem o uso de uma carta na

variedade inteira. As cartas, portanto, são locais por natureza [12]. Por *locais*, entendem-se os conceitos válidos apenas na vizinhança de um ponto. Ao contrário, conceitos *globais* aplicam-se a todo o espaço pertinente. Costuma-se denominar de expressão “local” a expressão de um objeto geométrico em termos de coordenadas, pois que as cartas dificilmente são globais.

Aqui emerge a noção de variedade como sendo um espaço topológico que é recoberto por cartas locais, de tal modo que cada ponto de  $M$  aparece em pelo menos uma carta. Na interseção de dois domínios, os dois conjuntos de coordenadas têm que se relacionar diferenciavelmente. Tornemos mais precisa esta condição.

Sejam  $(U, \varphi)$  e  $(V, \psi)$  duas cartas, tais que o conjunto  $W = U \cap V$  não é vazio. Isto é, os domínios das cartas possuem interseção não vazia. Denotemos as imagens de  $W$  sob  $\varphi$  e  $\psi$  por  $\varphi(W)$  e  $\psi(W)$ , respectivamente. É perfeitamente razoável construir os mapeamentos  $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(W) \rightarrow \varphi(W)$  e  $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(W) \rightarrow \psi(W)$ . Estes mapeamentos relacionam abertos do  $R^n$  e, portanto, as noções usuais do cálculo diferencial podem lhes ser aplicadas. Quando os mapeamentos são lisos, diz-se que as cartas são compatíveis [13]. Nesta situação, é possível trocar de coordenadas à vontade, o que é um requerimento muito natural.

Um conjunto de cartas compatíveis que recobre  $M$  é dito *atlas*. Tecnicamente, é possível que dois atlas formalmente diferentes acarretem o mesmo cálculo em  $M$ . Para eliminar esta possibilidade, exige-se que toda carta compatível com as demais deva ser incluída no atlas. Deste modo obtém-se um atlas *completo*.

Usando cartas locais, o cálculo nas variedades pode ser construído por

analogia ao cálculo no  $R^n$ . Por exemplo, diz-se que uma função  $f : M \rightarrow R$  é diferenciável no ponto  $\mathbf{p}$  de  $M$  quando sua representação  $f(x^1, \dots, x^n)$  por coordenadas locais  $(x^1(\mathbf{p}), \dots, x^n(\mathbf{p}))$  for diferenciável em  $\mathbf{p}$ , no sentido usual. Note que função é um conceito intrínseco: é uma relação que associa um número a cada ponto da variedade. Na prática, porém, se usam coordenadas. Frequentemente, abusa-se da linguagem e diz-se que a representação de um objeto numa carta é o próprio objeto. Por exemplo, diz-se que  $f(x^1, \dots, x^n)$  é a função  $f$ .

Povoaremos nossa variedade com uma fauna de objetos geométricos, a começar por vetores tangentes.

## 2.2 Vetores Tangentes

Seja  $F(M)$  o espaço das funções lisas em  $M$ . Define-se *vetor tangente*  $\mathbf{v}(\mathbf{p})$  a  $M$  no ponto  $\mathbf{p}$  de  $M$  como sendo um mapeamento linear  $\mathbf{v}(\mathbf{p}) : F(M) \rightarrow R$  que satisfaz a regra de Leibniz. Ou seja, se  $f$  e  $g$  são funções lisas e  $\alpha$  e  $\beta$  números (sempre sub-entendidos reais), então

$$\mathbf{v}(\mathbf{p})(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathbf{v}(\mathbf{p})(f) + \beta \mathbf{v}(\mathbf{p})(g), \quad (2.1)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{p})(fg) = f(\mathbf{p})\mathbf{v}(\mathbf{p})(g) + g(\mathbf{p})\mathbf{v}(\mathbf{p})(f). \quad (2.2)$$

Será visto o exemplo concreto dos vetores tangentes no  $R^n$ . Considere-se  $M = R^n$  e um ponto dado  $\mathbf{y} \in R^n$ . Para lembrar uma noção básica, uma *curva*  $\gamma$  no  $R^n$  é um mapeamento  $\gamma : I \subset R \rightarrow R^n / t \in I \mapsto \gamma(t) \in R^n$ . Seja uma curva  $\gamma$  que passa por  $\mathbf{y}$ . O *vetor tangente*  $\dot{\gamma}(t_0)$  a curva no ponto  $\mathbf{y}$  é dado por

$$\dot{\gamma}(t_0) = \left. \frac{d\gamma(t)}{dt} \right|_{t_0}, \quad (2.3)$$

sendo que  $\gamma(t_0) = \mathbf{y}$ . O conjunto  $T_{\mathbf{y}}R^n$  dos vetores tangentes em  $\mathbf{y}$  a todas as possíveis curvas que passam no ponto é um espaço vetorial linear. De fato, as regras de adição e de multiplicação por escalar destes vetores podem ser estabelecidas do modo usual. Isto é, se  $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^n)$  e  $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n)$  são elementos de  $T_{\mathbf{y}}R^n$  e  $\alpha$  e  $\beta$  números, então

$$\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} = (\alpha u^1 + \beta v^1, \dots, \alpha u^n + \beta v^n). \quad (2.4)$$

Tomando  $f(\mathbf{x})$  como uma função no  $R^n$  e  $\mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n)$  como um elemento de  $T_{\mathbf{y}}R^n$ , a derivada direcional de  $f$  no ponto  $\mathbf{y}$  na direção de  $\mathbf{v}$  é

$$\mathbf{v}(\mathbf{y})(f) = v^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu}(\mathbf{y}). \quad (2.5)$$

A derivada direcional satisfaz precisamente as regras de linearidade (2.1) e de Leibniz (2.2). Assim, os vetores tangentes no  $R^n$  podem ser entendidos como mapeamentos que atuam sobre funções através da derivada direcional. Neste sentido, os operadores diferenciais de primeira ordem  $\partial/\partial \mathbf{x}^\mu$ ;  $\mu = 1, \dots, n$  são vetores tangentes no  $R^n$ . Além disso, o conjunto  $(\partial/\partial \mathbf{x}^1, \dots, \partial/\partial \mathbf{x}^n)$  é uma base de  $T_{\mathbf{y}}R^n$ , sendo sempre possível expressar um vetor tangente no  $R^n$  de acordo com uma combinação linear do tipo

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) = v^\mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\mu}(\mathbf{y}), \quad \mathbf{v}(\mathbf{y}) \in T_{\mathbf{y}}R^n. \quad (2.6)$$

No caso geral, o panorama permanece localmente semelhante ao  $R^n$ . De fato, embora as variedades quase nunca sejam espaços vetoriais, o espaço  $T_{\mathbf{p}}M$  dos vetores tangentes a  $M$  em  $\mathbf{p}$  possui a estrutura de um espaço vetorial, chamado *espaço tangente* a  $M$  em  $\mathbf{p}$ . Dadas coordenadas  $(x^1(\mathbf{p}), \dots, x^n(\mathbf{p}))$ , existe uma base de  $T_{\mathbf{p}}M$  naturalmente associada. No que segue, será descrita sua construção.

Em geral, não é possível tomar a derivada parcial de uma função  $g : M \rightarrow R$  na variedade. Como sempre, é necessário introduzir uma carta  $(O, \phi)$ . Dadas coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$  e a representação  $g(x^1, \dots, x^n)$ , tem-se que a derivada parcial de  $g$  no ponto  $\mathbf{p}$  se calcula na imagem  $\phi(\mathbf{p}) \in R^n$ :

$$\frac{\partial g}{\partial x^\mu}(\mathbf{p}) = \frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x^\mu}(\phi(\mathbf{p})). \quad (2.7)$$

Os operadores diferenciais de primeira ordem

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\mu}(\mathbf{p}) : F(M) \rightarrow R \quad / \quad g \mapsto \frac{\partial g}{\partial x^\mu}(\mathbf{p}); \quad \mu = 1, \dots, n \quad (2.8)$$

satisfazem (2.1) – (2.2) e portanto são vetores tangentes a  $M$  em  $\mathbf{p}$ . Além disso, o conjunto  $(\partial/\partial \mathbf{x}^1(\mathbf{p}), \dots, \partial/\partial \mathbf{x}^n(\mathbf{p}))$  é uma base de  $T_{\mathbf{p}}M$ . Isto é, todo vetor tangente a  $M$  em  $\mathbf{p}$  pode ser expresso como uma combinação linear do tipo

$$\mathbf{v}(\mathbf{p}) = v^\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\mu}(\mathbf{p}), \quad \mathbf{v}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}M, \quad (2.9)$$

sendo  $(v^1(\mathbf{x}), \dots, v^n(\mathbf{x}))$  as componentes de  $\mathbf{v}(\mathbf{p})$  na base  $(\partial/\partial \mathbf{x}^1(\mathbf{p}), \dots, \partial/\partial \mathbf{x}^n(\mathbf{p}))$ .

A atuação de  $\mathbf{v}(\mathbf{p})$  sobre funções  $g : M \rightarrow R$  é dada por

$$\mathbf{v}(\mathbf{p})(g) = v^\mu(\mathbf{x}) \frac{\partial g}{\partial x^\mu}(\mathbf{p}). \quad (2.10)$$

A união de todos os espaços tangentes de  $M$  constitui o *fibrado tangente*  $TM$ . Imaginando os espaços tangentes como planos, pode-se imaginar que  $TM$  modela (no sentido artístico) localmente a variedade. O fibrado tangente possui a estrutura de uma variedade, com o dobro da dimensão de  $M$ . Cada ponto de  $TM$  é uma dupla (ponto de  $M$ , vetor tangente). Normalmente, as coordenadas de  $TM$  são denotadas por  $(x^1, \dots, x^n, \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n)$ . Note que  $\dot{x}^\mu$  é apenas uma notação, nada tendo a ver, em princípio, com a “derivada temporal” de  $x^\mu$ .

A Mecânica Lagrangiana se dá no fibrado tangente do espaço configuracional. O Lagrangiano (nos casos autônomos) é uma função da posição (que especifica um ponto da variedade de configuração) e da velocidade (que especifica um vetor tangente).

Uma noção muito freqüente em Física é a de campo vetorial. Um *campo vetorial*  $\mathbf{v}$  definido em  $M$  é uma prescrição que associa a cada ponto  $\mathbf{p}$  de  $M$  um único vetor tangente  $\mathbf{v}(\mathbf{p})$  de  $T_{\mathbf{p}}M$ . Isto é,  $\mathbf{v}$  é um mapeamento  $\mathbf{v} : M \rightarrow TM/\mathbf{p} \in M \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{p}) \in T_{\mathbf{p}}M$ . O conjunto de todos os campos vetoriais em  $M$  forma uma álgebra de Lie. Álgebras de Lie são recorrentes neste trabalho. Chama-se *álgebra de Lie* um espaço linear  $L$  munido de uma operação  $[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L$  tal que são satisfeitas as seguintes propriedades:

(a) bilinearidade:

$$[\alpha A + \beta B, C] = \alpha[A, C] + \beta[B, C], \quad (2.11)$$

$$[A, \beta B + \gamma C] = \beta[A, B] + \gamma[A, C]; \quad (2.12)$$

(b) anti-simetria:

$$[A, B] = -[B, A]; \quad (2.13)$$

(c) identidade de Jacobi:

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \quad (2.14)$$

Acima,  $A, B$  e  $C$  pertencem a  $L$  e  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  são números.

Trivialmente, o conjunto dos campos vetoriais em  $M$  é um espaço linear, definindo de modo intuitivo as operações de soma e multiplicação por escalar. Este conjunto adquire estrutura de álgebra de Lie definindo como realização da álgebra o produto  $[\cdot, \cdot]$  dado por

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}, \quad (2.15)$$

para dois campos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . O produto dado acima é dito *comutador*. De maneira explícita, o comutador age sobre uma função qualquer  $f \in F(M)$  segundo a regra

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}](f) = \mathbf{u}(\mathbf{v}(f)) - \mathbf{v}(\mathbf{u}(f)). \quad (2.16)$$

O leitor pode certificar-se diretamente que  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$  é um operador diferencial de primeira ordem (isto é, um campo vetorial). De fato, numa carta local, tem-se

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \left( u^\mu \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu} - v^\mu \frac{\partial u^\nu}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial}{\partial x^\nu}(\mathbf{p}). \quad (2.17)$$

Aproximadamente todas as teorias da Física (Mecânica Quântica ordinária, Teoria Quântica de Campos, Mecânica Clássica, Mecânica Estatística,...) de um jeito ou de outro são permeadas por álgebras de Lie.

### 2.3 Vetores Cotangentes

Os vetores tangentes atuam nas funções associando-lhes números. O espaço dos funcionais lineares que atuam em vetores tangentes associando-lhes números é, apropriadamente, chamado *espaço dual*. Este espaço vetorial é denotado por  $T_{\mathbf{p}}^*M$  e possui a mesma dimensão de  $T_{\mathbf{p}}M$ . Seus elementos são ditos *vetores cotangentes*, ou *covetores*.

Dada uma base  $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$  de  $T_{\mathbf{p}}M$ , define-se univocamente uma *base dual*  $(\theta^1, \dots, \theta^n)$  de  $T_{\mathbf{p}}^*M$  tal que  $\theta^\mu(\mathbf{e}_\nu) = \delta_\nu^\mu$ . As bases recíprocas usadas na Física do Estado Sólido são um exemplo de bases duais utilizadas correntemente.

Dadas coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ , define-se o *diferencial*  $d\mathbf{x}^\mu$  como sendo o

vetor cotangente tal que

$$\mathbf{dx}^\mu(\mathbf{v}) = v^\mu, \quad (2.18)$$

quando  $\mathbf{v} = v^\mu \partial / \partial \mathbf{x}^\mu$  é um vetor tangente. Na verdade, o conjunto  $(\mathbf{dx}^1, \dots, \mathbf{dx}^n)$  é uma base de  $T_{\mathbf{p}}^*M$ , dual de  $(\partial / \partial \mathbf{x}^1, \dots, \partial / \partial \mathbf{x}^n)$ ,

$$\mathbf{dx}^\mu \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\nu} \right) = \delta_\nu^\mu. \quad (2.19)$$

Nesta base natural, qualquer covetor  $\theta$  decompõe-se conforme

$$\theta = \theta_\mu(\mathbf{x}) \mathbf{dx}^\mu. \quad (2.20)$$

As funções  $(\theta_1(\mathbf{x}), \dots, \theta_n(\mathbf{x}))$  são ditas componentes de  $\theta$  na base  $(\mathbf{dx}^1, \dots, \mathbf{dx}^n)$ .

Como um mnemônico, é costume escrever os índices das componentes dos covetores como sub-índices e os das componentes dos vetores, como super-índices. Os índices dos elementos da base dual, por outro lado, são super-índices, e os da base direta, sub-índices.

Numa carta local, se  $\theta = \theta_\mu \mathbf{dx}^\mu$  pertence a  $T_{\mathbf{p}}^*M$  e  $\mathbf{v} = v^\mu \partial / \partial \mathbf{x}^\mu$  pertence a  $T_{\mathbf{p}}M$ , então a sua *contração* é dada por

$$\langle \theta, \mathbf{v} \rangle = \theta_\mu v^\mu. \quad (2.21)$$

O conjunto de todos os espaços cotangentes é uma variedade, o *fibrado cotangente*  $T^*M$ . Esta variedade possui o dobro da dimensão de  $M$ , e seus elementos são as duplas (ponto de  $M$ , covetor). Normalmente, denotam-se suas coordenadas por  $(x^1, \dots, x^n, p_1, \dots, p_n)$ , sendo que  $(x^1, \dots, x^n)$  especifica o ponto de  $M$  e  $(p_1, \dots, p_n)$  o covetor.

Um mapeamento  $M \rightarrow T^*M$  diferenciável é dito *1-forma*, o análogo para vetores cotangentes dos campos vetoriais de vetores tangentes.

Vetores tangentes e cotangentes são casos particulares de objetos mais gerais, discutidos na próxima seção.

## 2.4 Tensores

Um *tensor* do tipo  $(r, s)$  é um objeto que associa linearmente um número a  $r$  covetores e  $s$  vetores, definidos num ponto de  $M$ . Ou seja, tensores são elementos do espaço (linear) dos funcionais multilineares no produto cartesiano

$$T_{\mathbf{p}}M \times \dots \times T_{\mathbf{p}}M \times T_{\mathbf{p}}^*M \times \dots \times T_{\mathbf{p}}^*M, \quad (2.22)$$

sendo que acima ocorrem  $s$  fatores do tipo  $T_{\mathbf{p}}M$  e  $r$  fatores do tipo  $T_{\mathbf{p}}^*M$ .

Assim, um vetor tangente é um tensor do tipo  $(1, 0)$ , e um vetor cotangente é um tensor do tipo  $(0, 1)$ .

Uma base do espaço tensorial pode ser construída utilizando a operação do produto tensorial. O *produto tensorial*  $\otimes$  entre um tensor  $\mathbf{u}$  do tipo  $(r_1, s_1)$  e um tensor  $\mathbf{v}$  do tipo  $(r_2, s_2)$  define-se por

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})(\alpha^1, \dots, \alpha^{r_1}, \beta^1, \dots, \beta^{r_2}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{s_1}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{s_2}) = \\ \mathbf{u}(\alpha^1, \dots, \alpha^{r_1}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{s_1})\mathbf{v}(\beta^1, \dots, \beta^{r_2}, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{s_2}), \end{aligned} \quad (2.23)$$

sendo que  $\alpha^\mu$  e  $\beta^\mu$  são covetores e  $\mathbf{f}_\mu$  e  $\mathbf{g}_\mu$  são vetores. Depreende-se que  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  é um tensor, do tipo  $(r_1 + r_2, s_1 + s_2)$ .

A partir das bases naturais de  $T_{\mathbf{p}}M$  e de  $T_{\mathbf{p}}^*M$ , sempre é possível encontrar uma base do espaço dos tensores via produto tensorial. De fato, dado um tensor  $\mathbf{T}$  do tipo  $(r, s)$ , definem-se univocamente componentes  $T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r}$  tais que

$$\mathbf{T} = T_{\nu_1 \dots \nu_s}^{\mu_1 \dots \mu_r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\mu_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^{\mu_r}} \otimes \mathbf{dx}^{\nu_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{dx}^{\nu_s}. \quad (2.24)$$

Definiram-se tensores *num ponto* de  $M$ . Globalizando, obtém-se *campos tensoriais*.

Não serão mais detalhadas as operações da álgebra tensorial as quais, quando necessário, serão devidamente explicadas. Sobre o assunto, pode ser recomendada a referência [15].

## 2.5 Formas Exteriores

A compreensão geométrica da Mecânica Hamiltoniana dificilmente é concebível sem as formas exteriores, também ditas formas diferenciais, ou simplesmente formas. Uma *forma externa de grau  $k$* , ou  $k$ -forma, é um campo tensorial do tipo  $(0, k)$  totalmente anti-simétrico. Ou seja, uma  $k$ -forma associa linearmente a  $k$  vetores tangentes um número, e esta associação é anti-simétrica frente à permutação de quaisquer dois vetores.

Consideremos casos específicos. Já foram tratadas as 1-formas, entre as quais se acha o diferencial de uma função. As 2-formas são especialmente importantes na Mecânica Hamiltoniana, conforme será visto. Como exemplo de 2-forma, seja a área orientada definida pelos vetores  $\mathbf{u} = (u^1, u^2)$  e  $\mathbf{v} = (v^1, v^2)$  no  $R^2$ , o determinante

$$\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ v^1 & v^2 \end{vmatrix}. \quad (2.25)$$

Esta área abstratamente definida tem contrapartida em noções bem conhecidas, como a área de um paralelogramo. Além disso,  $\mathbf{S}$  tem orientação:  $\mathbf{S}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\mathbf{S}(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ .

Por outro lado, o volume orientado  $n$ -dimensional determinado pelos ve-

tores  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ ,

$$\mathbf{V}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \begin{vmatrix} u_1^1 & \dots & u_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_n^1 & \dots & u_n^n \end{vmatrix}, \quad (2.26)$$

é um exemplo de  $n$ -forma. Adiante, serão encontradas outras  $n$ -formas.

Devido à anti-simetria, as  $k$ -formas numa variedade  $n$ -dimensional são identicamente nulas quando  $k > n$ . Em contraste, as formas de menor grau, as 0-formas, definem-se como sendo funções.

O conjunto  $\Lambda_{\mathbf{p}}^k(M)$  das  $k$ -formas em  $\mathbf{p}$  é um espaço linear, subespaço do conjunto dos tensores do tipo  $(0, k)$  em  $\mathbf{p}$ .  $\Lambda_{\mathbf{p}}^k(M)$  tem dimensão  $n!/(n-k)!k!$ . Sua base será construída logo mais.

As operações mais relevantes para nós, no concernente às formas, são o produto exterior, o produto interior e a derivação exterior. Cada uma delas será explanada resumidamente.

No caso do espaço tensorial, usou-se o produto tensorial para obter uma base. No caso das formas, se construirá o *produto exterior*  $\wedge$  entre  $m$  1-formas  $\theta^1, \dots, \theta^m$  para encontrar uma base de  $\Lambda_{\mathbf{p}}^k(M)$ . Por definição,  $\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m$  atua em  $m$  vetores  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  de acordo com

$$(\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m)(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m) = \begin{vmatrix} \theta^1(\mathbf{u}_1) & \dots & \theta^m(\mathbf{u}_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta^1(\mathbf{u}_m) & \dots & \theta^m(\mathbf{u}_m) \end{vmatrix}. \quad (2.27)$$

Depreende-se da definição que  $\theta^1 \wedge \dots \wedge \theta^m$  é uma  $m$ -forma. Além disso, observando a definição de volume orientado  $n$ -dimensional  $\mathbf{V}$ , tem-se que

$$\mathbf{V} = d\mathbf{x}^1 \wedge \dots \wedge d\mathbf{x}^n. \quad (2.28)$$

Qualquer  $k$ -forma  $\theta$  decompõe-se univocamente em componentes  $\theta_{|\mu_1 \dots \mu_k|}$

segundo

$$\theta = \theta_{|\mu_1 \dots \mu_k|} \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_k}, \quad (2.29)$$

sendo que as barras envolvendo  $\mu_1 \dots \mu_k$  significam, agora e no que segue, que os índices assumem valores ordenados,  $1 \leq \mu_1 < \dots < \mu_k \leq n$  [15]. Utiliza-se esta notação com barras para assinalar o número estrito de componentes das formas. Algumas vezes, escreve-se  $\theta = (1/k!) \theta_{\mu_1 \dots \mu_k} \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_k}$ .

Concluindo, o produto exterior fornece uma base de  $\Lambda_{\mathbf{p}}^k(M)$ , dada pelas  $k$ -formas

$$\mathbf{dx}^{|\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_k|}. \quad (2.30)$$

O número destas  $k$ -formas é a dimensão de  $\Lambda_{\mathbf{p}}^k(M)$ . Conforme antecipado, tem-se que esta dimensão é  $n!/k!(n-k)!$ .

O produto exterior entre formas de grau arbitrário advém do produto exterior entre 1-formas por linearidade. Isto é, se  $\rho = \rho_{|\mu_1 \dots \mu_m|} \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_m}$  é uma  $m$ -forma e  $\sigma = \sigma_{|\nu_1 \dots \nu_n|} \mathbf{dx}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\nu_n}$  é uma  $n$ -forma, então

$$\rho \wedge \sigma = \rho_{|\mu_1 \dots \mu_m|} \sigma_{|\nu_1 \dots \nu_n|} \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_m} \wedge \mathbf{dx}^{\nu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\nu_n}. \quad (2.31)$$

Tem-se então a  $(n+m)$ -forma  $\rho \wedge \sigma$ .

Além de ser distributivo e associativo, o produto  $\wedge$  satisfaz

$$\rho \wedge \sigma = (-1)^{mn} \sigma \wedge \rho, \quad (2.32)$$

sendo  $m$  e  $n$  os graus de  $\rho$  e  $\sigma$ . Assim,  $\rho \wedge \rho = 0$  se  $\rho$  for de grau ímpar. Em particular,  $\mathbf{dx}^\mu \wedge \mathbf{dx}^\mu = 0$  (não há somatório implícito).

O *produto interior*  $i_{\mathbf{v}}\theta$  de uma  $k$ -forma  $\theta$  com um vetor tangente  $\mathbf{v}$  é uma forma de grau  $(k-1)$ . Sua atuação em  $(k-1)$  vetores  $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  define-se por

$$(i_{\mathbf{v}}\theta)(\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k) = \theta(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k). \quad (2.33)$$

A derivada exterior  $\mathbf{d}$  permite obter uma  $(k + 1)$ -forma a partir de uma  $k$ -forma. Enfatizamos que formas são objetos intrinsecamente definidos: são tensores completamente anti-simétricos. Apenas para simplificar, a derivada  $\mathbf{d}$  será definida usando coordenadas.

Se  $\theta = \theta_{|\mu_1 \dots \mu_k|} \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_k}$  é uma  $k$ -forma, então sua *derivada exterior* é

$$\mathbf{d}\theta = \mathbf{d}\theta_{|\mu_1 \dots \mu_k|} \wedge \mathbf{dx}^{\mu_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{\mu_k}, \quad (2.34)$$

sendo  $\mathbf{d}\theta_{|\mu_1 \dots \mu_k|}$  a diferencial usual das componentes de  $\theta$ . Com isto, obtém-se que  $\mathbf{d}\theta$  é uma  $(k + 1)$ -forma.

Além de ser linear,  $\mathbf{d}$  também satisfaz

$$\mathbf{d}(\rho \wedge \sigma) = \mathbf{d}\rho \wedge \sigma + (-1)^m \rho \wedge \mathbf{d}\sigma, \quad (2.35)$$

ou anti-regra de Leibnitz, sendo  $m$  o grau de  $\rho$ , e

$$\mathbf{d}^2 = 0. \quad (2.36)$$

Estas propriedades são facilmente demonstráveis usando coordenadas.

Vejamos alguns casos concretos de derivadas exteriores de formas no  $R^3$ :

i) se  $f(x, y, z)$  é uma 0-forma,

$$\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{dy} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{dz}; \quad (2.37)$$

ii) se  $\rho = A\mathbf{dx} + B\mathbf{dy} + C\mathbf{dz}$  é uma 1-forma,

$$\mathbf{d}\rho = \left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right) \mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz} + \left(\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}\right) \mathbf{dz} \wedge \mathbf{dx} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}\right) \mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy}; \quad (2.38)$$

iii) se  $\sigma = P\mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz} + Q\mathbf{dz} \wedge \mathbf{dx} + R\mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy}$  é uma 2-forma, então

$$\mathbf{d}\sigma = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathbf{dx} \wedge \mathbf{dy} \wedge \mathbf{dz}. \quad (2.39)$$

Assim, as operações básicas do cálculo vetorial no  $R^3$ , quais sejam o gradiente, o rotacional e o divergente, estão amalgamadas na derivada exterior. Na verdade, o cálculo com as formas diferenciais permite reescrever (e generalizar) praticamente todo o cálculo vetorial clássico numa linguagem muito mais clara e compacta. A este respeito, pode-se ver [16].

É importante notar que nem toda  $k$ -forma é a derivada exterior de alguma  $(k - 1)$ -forma. Quando isto ocorre, trata-se de uma forma *exata*. Por outro lado, uma forma cuja derivada exterior é nula chama-se forma *fechada*. Devido a propriedade segundo a qual a derivada exterior satisfaz  $\mathbf{d}^2 = 0$ , as formas exatas sempre são fechadas. A recíproca desta afirmativa só vale se a topologia do espaço for adequada. Esta é a mensagem do lema de Poincaré, o qual pode ser assim enunciado:

*Lema de Poincaré: se  $M$  pode ser contraído a um ponto, então formas fechadas em  $M$  são também exatas.*

O trabalho  $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr}$  realizado ao longo de um deslocamento  $\mathbf{dr}$  por uma força  $\mathbf{F}$  é uma 1-forma. Se  $\mathbf{F}$  for derivável de um potencial,  $\mathbf{F} = -\nabla U$ , então  $W$  será exata:  $W = -\mathbf{d}U$ .

Sem dúvida, foi omitida uma vasta gama de tópicos importantes relativos às formas exteriores, dentre os quais, a sua integração. Entretanto, é necessário brevidade.

## 2.6 Campos Vetoriais e Transformações

O comportamento dos objetos de uma teoria sob mudanças de coordenadas, ou, mais genericamente, sob mapeamentos é um tópico fundamental. Intimamente ligadas à questão estão as simetrias subjacentes ao modelo. O

conhecimento do grupo de simetrias de uma teoria é importante por motivos práticos, estéticos e estruturais. Práticos, porque a resolução de um problema específico torna-se mais fácil quando são exploradas as simetrias que lhe são subjacentes. Nos casos em que há simetria, há menos graus de liberdade essenciais do que a dimensão do espaço ambiente. Estéticos, devido ao evidente apelo geométrico das transformações de simetria. Estruturais, porque permite isolar os objetos *invariantes* na teoria, os quais, em última análise, são os únicos de fato relevantes. O último aspecto tem um papel preponderante nesta dissertação. No formalismo Hamiltoniano (como será visto em detalhe) o objeto geométrico fundamental é o colchete de Poisson. O grupo de simetria é o das transformações canônicas, que deixam o colchete de Poisson invariante (ver seção 3.2).

Antes de tratarmos de objetos complicados, vejamos o comportamento dos campos vetoriais e das 1-formas sob mapeamentos.

Uma função de uma variável é determinada localmente pela sua derivada. O conceito de derivada, estendido para mapeamentos, fornece o comportamento local dos mapeamentos. Chama-se de *derivada*  $\phi_*(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\phi(\mathbf{p})}N$  de um mapeamento  $\phi : M \rightarrow N$ , no ponto  $\mathbf{p}$  de  $M$ , o objeto que segue, sendo  $M$  e  $N$  variedades.

Seja  $\mathbf{v}$  um vetor tangente a  $M$  em  $\mathbf{p}$ , vetor velocidade no ponto  $\mathbf{p}$  de uma curva  $\gamma$  contida em  $M$ . Pode-se parametrizar esta curva de modo que  $\gamma(t=0) = \mathbf{p}$ ,  $d\gamma/dt|_{t=0} = \mathbf{v}$ , usando um parâmetro adequado  $t$ . A curva  $\gamma$  naturalmente pode ser mapeada por  $\phi$  numa curva  $\phi(\gamma)$  em  $N$ , a qual passa por  $\phi(\mathbf{p})$  quando  $t = 0$ . O vetor velocidade desta curva  $\phi(\gamma)$ , no ponto  $\phi(\mathbf{p})$ ,

define a derivada do mapeamento, via

$$\phi_*(\mathbf{p})\mathbf{v} = \left. \frac{d\phi(\gamma(t))}{dt} \right|_{t=0}. \quad (2.40)$$

Veamos a expressão da equação acima numa carta local. Sejam  $(x^1, \dots, x^m)$  coordenadas de  $\mathbf{p}$  em  $M$ , e  $(y^1, \dots, y^n)$ , coordenadas de  $\phi(\mathbf{p})$  em  $N$ . Sejam  $(v^1, \dots, v^m)$  as componentes de  $\mathbf{v}$ , e  $(u^1, \dots, u^n)$ , as componentes de  $\phi_*(\mathbf{p})\mathbf{v}$ . Encontra-se [12]

$$u^\mu = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu} v^\nu. \quad (2.41)$$

Esta relação nos mostra os seguintes fatos: a)  $\phi_*(\mathbf{p})$  não depende da curva  $\gamma$ , como é esperado; b)  $\phi_*(\mathbf{p}) : T_{\mathbf{p}}M \rightarrow T_{\phi(\mathbf{p})}N$  é um mapeamento linear; c) quando  $M = N$ , é reproduzida a lei clássica de transformação de vetores sob mudança de coordenadas. Vale lembrar que a geometria diferencial clássica define seus objetos, via de regra, pelo seu comportamento frente à troca de coordenadas. Deste modo há correspondência entre conceitos livres de coordenadas e conceitos da geometria diferencial clássica.

Unindo os mapeamentos  $\phi_*(\mathbf{p})$  definidos em todos os pontos da variedade, obtém-se um mapeamento de todo fibrado tangente,

$$\phi_* : TM \rightarrow TN, \quad \phi_*\mathbf{v} = \phi_*(\mathbf{p})\mathbf{v} \quad (2.42)$$

para  $\mathbf{v}$  pertencente a  $T_{\mathbf{p}}M$ .

O assunto agora será as formas exteriores. Seja  $\phi : M \rightarrow N$  um mapeamento entre variedades  $M$  e  $N$ , e  $\theta$ , uma  $k$ -forma em  $N$ . O mapeamento induz uma  $k$ -forma  $\phi^*\theta$ , chamada *imagem recíproca*, definida em  $M$  como segue.

O valor da forma  $\phi^*\theta$  nos vetores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  de  $T_{\mathbf{p}}M$  é o valor da forma  $\theta$  nas imagens destes vetores sob  $\phi$ . Ou seja,

$$(\phi^*\theta)(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k) = \theta(\phi_*\mathbf{v}_1, \dots, \phi_*\mathbf{v}_k). \quad (2.43)$$

Numa carta local, se  $(x^1, \dots, x^m)$  são coordenadas de  $\mathbf{p}$  em  $M$  e  $(y^1, \dots, y^n)$  coordenadas de  $\phi(\mathbf{p})$  em  $N$ , então  $\phi^*\theta$  obtém-se simplesmente substituindo em  $\theta$  as variáveis  $\mathbf{y}$  pelas variáveis  $\mathbf{x}$ . Assim, para 1-formas,

$$(\phi^*\theta)_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \theta_\nu. \quad (2.44)$$

A relação acima reproduz a lei clássica de transformação das componentes das 1-formas. Tais leis de transformação fornecem um meio rápido de avaliar o caráter geométrico de um dado objeto. Por exemplo, seja o espaço de configuração de um sistema mecânico, com coordenadas  $(q^1, \dots, q^n)$ . Dado um mapeamento inversível  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q}(\mathbf{q})$ , a transformação das componentes da velocidade de uma trajetória é dada por

$$\dot{Q}^\mu = \frac{\partial Q^\mu}{\partial q^\nu} \dot{q}^\nu. \quad (2.45)$$

Vê-se de imediato que as velocidades são vetores tangentes. Analogamente, os momenta são vetores cotangentes. De fato, caso haja um Lagrangiano  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , as componentes do momentum são definidas segundo o mapeamento de Legendre

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^\mu}. \quad (2.46)$$

Usando a última equação, é fácil verificar que sob a transformação  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{Q}(\mathbf{q})$  as componentes do momentum satisfazem

$$p_\mu = \frac{\partial Q^\nu}{\partial q^\mu} P_\nu, \quad (2.47)$$

sendo que  $P_\nu = \partial \bar{L} / \partial \dot{Q}_\nu$ . Aqui,  $\bar{L}$  está sendo entendido como o Lagrangiano expresso nas novas variáveis,  $\bar{L}(\mathbf{Q}, \dot{\mathbf{Q}}) = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{Q})}$ . Assim, os momenta são 1-formas, devido à lei de transformação de suas componentes. Como corolário, a Mecânica Hamiltoniana canônica tem como palco o fibrado cotangente do espaço de configuração. Realmente, o Hamiltoniano  $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  definido pela transformação de Legendre do Lagrangiano é uma função no fibrado cotangente, pois  $\mathbf{q}$  especifica a posição, e  $\mathbf{p}$ , o covetor.

O mapeamento  $\phi^*$  é linear e satisfaz

$$\phi^*(\theta \wedge \rho) = \phi^*(\theta) \wedge \phi^*(\rho), \quad (2.48)$$

com  $\theta$  e  $\rho$  formas, bem como

$$\phi^*(\mathbf{d}\theta) = \mathbf{d}(\phi^*\theta). \quad (2.49)$$

Um instrumento conveniente para analisar a variação dos objetos geométricos sob transformações é a derivada de Lie. Antes de construí-la, vejamos como campos vetoriais estão intimamente ligados a transformações. Como preliminar, serão expostos alguns conceitos sobre esses importantes objetos, os sistemas dinâmicos. Normalmente, os sistemas dinâmicos adentram na Física via uma lei de evolução num espaço de estados. Um *sistema dinâmico* é um campo vetorial  $\mathbf{v}$  numa variedade  $M$ . Suas *curvas integrais*  $\gamma(t)$ , ou trajetórias, tem vetor tangente dado pelo campo  $\mathbf{v}$  em cada ponto. As curvas integrais, portanto, satisfazem o sistema autônomo de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \mathbf{v}(\gamma(t)), \quad (2.50)$$

sendo que  $t$  pertence a um aberto  $I$  dos reais. Para  $\mathbf{v}$  bem comportado [12], em cada ponto de  $M$  passa uma única curva integral. A prova advém

do teorema de existência e unicidade das soluções das equações diferenciais ordinárias.

Muitas vezes, especialmente em situações experimentais, o tempo cumpre um papel diferenciado das coordenadas. Define-se então *campo vetorial dependente do tempo*, que é um mapeamento  $\mathbf{v} : M \times I \rightarrow TM$  tal que, para todo  $t$  fixo pertencente ao sub-intervalo  $I$  contido nos reais,  $\mathbf{v}$  é um campo vetorial. As equações diferenciais correspondentes ao sistema dinâmico dependente do tempo são

$$\frac{d\gamma}{dt} = \mathbf{v}(\gamma, t), \quad t \in I \subset R, \quad (2.51)$$

que é um sistema não autônomo.

A discussão do resto da seção será restrita a campos vetoriais independentes do tempo. Suponha-se que cada solução de (2.50) pode ser prolongada para todo tempo. Chama-se de *fluxo*  $\Phi$  do campo  $\mathbf{v}$  o mapeamento uniparamétrico

$$\Phi : M \times R \rightarrow M \quad / \quad (\mathbf{p}, t) \mapsto \Phi_t(\mathbf{p}). \quad (2.52)$$

Acima,  $\Phi_t(\mathbf{p})$  é a curva integral de  $\mathbf{v}$  com condição inicial  $\mathbf{p}$ ,

$$\frac{d}{dt}\Phi_t(\mathbf{p}) = \mathbf{v}(\Phi_t(\mathbf{p})); \quad \Phi_0(\mathbf{p}) = \mathbf{p}. \quad (2.53)$$

Ou seja, modificando o parâmetro  $t$ , a condição inicial vai sendo “transportada” pelo fluxo ao longo da trajetória. Congelando o tempo  $t$  num valor fixo, obtém-se um mapeamento da variedade nela mesma,

$$\Phi_t : M \rightarrow M \quad / \quad \mathbf{p} \mapsto \Phi_t(\mathbf{p}). \quad (2.54)$$

Assim, um campo vetorial induz uma transformação (local) em  $M$ . Reciprocamente, as transformações podem ser localmente representadas por campos vetoriais, de modo natural.

Estamos aptos a construir a *derivada de Lie*,  $\mathbf{L}_v\Omega$ , de um campo tensorial  $\Omega$  na direção de  $\mathbf{v}$ , que representa a transformação considerada.  $\mathbf{L}_v\Omega$  é a taxa de variação inicial de  $\Omega$  na direção de  $\mathbf{v}$ , num dado ponto da variedade. A derivada de Lie será estudada caso a caso.

Se  $\Omega$  for uma função  $f$ ,  $\mathbf{L}_v f$  é simplesmente a derivada direcional de  $f$  na direção de  $\mathbf{v}$ :

$$\mathbf{L}_v f = \mathbf{v}(f). \quad (2.55)$$

No caso de  $\Omega$  ser uma 1-forma  $\theta$ , utiliza-se a imagem recíproca de  $\theta$  sob o fluxo  $\Phi$  do campo para construir a derivada de Lie. Seja a transformação uniparamétrica induzida localmente por  $\mathbf{v}$

$$\Phi_t : M \rightarrow M \quad / \quad \mathbf{p} \mapsto \Phi_t(\mathbf{p}). \quad (2.56)$$

Daí vem que a derivada de Lie de  $\theta$  sob  $\mathbf{v}$  é

$$\mathbf{L}_v\theta = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\Phi^*(\theta(\Phi_t(\mathbf{p}))) - \theta(\mathbf{p})]. \quad (2.57)$$

Encontra-se [14] que, se  $\mathbf{u}$  é um vetor tangente,

$$(\mathbf{L}_v\theta)(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{d}\langle \theta, \mathbf{u} \rangle, \mathbf{v} \rangle - \langle \theta, [\mathbf{v}, \mathbf{u}] \rangle, \quad (2.58)$$

sendo  $[\cdot, \cdot]$  o comutador definido na seção 2.2.

Quando  $\Omega$  é um vetor tangente  $\mathbf{u}$ , utiliza-se a inversa da derivada do mapeamento  $\Phi_t$ :

$$\mathbf{L}_v\mathbf{u} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\Phi_*^{-1}(\mathbf{u}(\Phi_t(\mathbf{p}))) - \mathbf{u}(\mathbf{p})]. \quad (2.59)$$

Encontra-se

$$\mathbf{L}_v \mathbf{u} = [\mathbf{v}, \mathbf{u}]. \quad (2.60)$$

A derivada de Lie é conhecida como “derivada do pescador” [13]: o fluxo transforma  $\Omega$ , o pescador o traz de volta através da imagem recíproca ou da inversa da derivada, e o compara com o objeto original.

A derivada de Lie de um tensor é obtida pela regra de Leibnitz. Por exemplo, se  $\mathbf{J}$  é um tensor do tipo  $(2, 0)$ ,

$$\mathbf{L}_v \mathbf{J} = (\mathbf{L}_v J^{\mu\nu}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\nu} + J^{\mu\nu} (\mathbf{L}_v \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\mu}) \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\nu} + J^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\mu} \otimes (\mathbf{L}_v \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^\nu}). \quad (2.61)$$

Para produtos exteriores entre formas  $\theta$  e  $\rho$ , vale também

$$\mathbf{L}_v(\theta \wedge \rho) = (\mathbf{L}_v \theta) \wedge \rho + \theta \wedge (\mathbf{L}_v \rho). \quad (2.62)$$

Com isto, encerra-se este capítulo, essencialmente um compêndio de pré-requisitos à geometrização da Mecânica Hamiltoniana.

## Capítulo 3

### SISTEMAS DE POISSON

Neste capítulo, são expostas as características básicas dos sistemas de Poisson, de uma maneira não demasiadamente abstrata. Os benefícios proporcionados pelas formulações de Poisson poderão ser assim apreciados. Discute-se em especial um caso particular importante e ilustrativo da Mecânica de Poisson, a Mecânica de Nambu. A seguir, uma seção é dedicada à análise da utilidade das descrições Hamiltonianas na questão da estabilidade. Como fechamento apresenta-se uma discussão a respeito do chamado Problema Inverso da Mecânica, o qual está intimamente ligado a questão da obtenção de estruturas Hamiltonianas associadas a sistemas dinâmicos.

#### 3.1 *Sistemas de Poisson*

Os objetos fundamentais do formalismo de Poisson são o Hamiltoniano e o tensor de Poisson [5], definidos a seguir.

Seja  $M$  uma variedade de estados, com dimensão  $m$  finita. Um *sistema dinâmico Hamiltoniano* em  $M$  é um campo vetorial  $\mathbf{v}_H : M \rightarrow TM$  dado por (para simplificar, serão considerados sistemas autônomos)

$$\mathbf{v}_H = \mathbf{J} \cdot \mathbf{d}H, \tag{3.1}$$

de modo que  $\langle \mathbf{d}F, \mathbf{v}_H \rangle = \mathbf{J}(\mathbf{d}F, \mathbf{d}H)$  para qualquer  $F : M \rightarrow R$ . Acima,  $\mathbf{J}$  é um tensor do tipo  $(2, 0)$ , o *tensor de Poisson*, e  $H$  é o *Hamiltoniano*, uma função na variedade,  $H : M \rightarrow R$ . O campo vetorial Hamiltoniano determinado por uma função  $H$  será sempre denotado por um vetor com o subscrito  $H$ .

Define-se sistema dinâmico Hamiltoniano utilizando objetos geométricos intrínsecos (campo vetorial, tensor e 1-forma). Usando coordenadas  $(x^1, \dots, x^m)$ , resulta que o conjunto de equações diferenciais ordinárias associado a um sistema dinâmico Hamiltoniano é

$$\dot{x}^\mu = J^{\mu\nu}(\mathbf{x})\partial_\nu H(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

sendo  $\partial_\nu = \partial/\partial x^\nu$ .

O tensor de Poisson é definido de modo que o produto  $\{, \}$  entre duas funções  $A : M \rightarrow R$  e  $B : M \rightarrow R$ ,

$$\{A, B\} = \langle \mathbf{d}A, \mathbf{v}_B \rangle, \quad (3.3)$$

é um colchete de Poisson. Um *colchete de Poisson* numa variedade  $M$  é um mapeamento  $\{, \} : F(M) \times F(M) \rightarrow F(M)$  que associa a quaisquer elementos  $A$  e  $B$  do espaço das funções em  $M$ ,  $F(M)$ , uma função  $\{A, B\}$  com as propriedades:

(a) bilinearidade:

$$\{\alpha A + \beta B, C\} = \alpha\{A, C\} + \beta\{B, C\}, \quad (3.4)$$

$$\{A, \beta B + \gamma C\} = \beta\{A, B\} + \gamma\{A, C\}, \quad (3.5)$$

para  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$  números;

(b) anti-simetria:

$$\{A, B\} = -\{B, A\}; \quad (3.6)$$

(c) identidade de Jacobi:

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0; \quad (3.7)$$

(d) regra de Leibnitz:

$$\{A, BC\} = \{A, B\}C + B\{A, C\}. \quad (3.8)$$

O colchete de Poisson torna a álgebra das funções lisas em  $M$  uma álgebra de Lie, graças à bilinearidade, à anti-simetria e à identidade de Jacobi.

Localmente,

$$\{A, B\} = \partial_\mu A J^{\mu\nu} \partial_\nu B. \quad (3.9)$$

A anti-simetria do colchete de Poisson e a identidade de Jacobi equivalem a

$$J^{\mu\nu} = -J^{\nu\mu}, \quad (3.10)$$

e

$$J^{\mu\nu} \partial_\mu J^{\rho\sigma} + J^{\mu\rho} \partial_\mu J^{\sigma\nu} + J^{\mu\sigma} \partial_\mu J^{\nu\rho} = 0, \quad (3.11)$$

respectivamente. A última equação pode ser compactada usando o símbolo de anti-simetrização completa  $[\nu\rho\sigma]$ , o qual atua sobre os índices por ele envolvidos [15]:

$$J^{\mu[\nu} \partial_\mu J^{\rho\sigma]} = 0. \quad (3.12)$$

A evolução temporal de qualquer função  $A(\mathbf{x}, t)$  devido ao fluxo Hamiltoniano é dada por

$$\dot{A}(\mathbf{x}, t) = \{A, H\} + \frac{\partial A}{\partial t}. \quad (3.13)$$

Em particular,

$$\dot{x}^\mu = \{x^\mu, H\}, \quad (3.14)$$

e, devido a anti-simetria do colchete de Poisson,

$$\dot{H} = \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (3.15)$$

Vê-se que nos casos em que  $H$  não depende do tempo o Hamiltoniano é uma constante de movimento. Quando o Hamiltoniano é a energia, este resultado é conhecido como lei de conservação da energia. De um modo geral, nos sistemas autônomos, o Hamiltoniano é uma função das constantes de movimento independentes do tempo.

Outro aspecto que merece atenção é a preservação do tensor de Poisson pelo fluxo Hamiltoniano. Isto é, sua derivada de Lie na direção de  $\mathbf{v}_H$  é nula:

$$\mathbf{L}_{\mathbf{v}_H} \mathbf{J} = 0. \quad (3.16)$$

Esta asserção pode ser provada usando coordenadas, isto é, demonstrando que

$$(\mathbf{L}_{\mathbf{v}_H} \mathbf{J})^{\mu\nu} = v^\rho \partial_\rho J^{\mu\nu} + J^{\nu\rho} \partial_\rho v^\mu - J^{\mu\rho} \partial_\rho v^\nu = 0. \quad (3.17)$$

Esta última equação é verificada após usar a forma explícita do campo vetorial e a identidade de Jacobi.

Os últimos resultados são obtidos após cálculos simples envolvendo as definições de colchete de Poisson e sistema Hamiltoniano. Vale lembrar, entretanto, a importância da propriedade (d) dos colchetes de Poisson, a regra de Leibniz. Esta propriedade torna o colchete de Poisson apropriado para equações diferenciais do tipo (3.14). Há que se dizer, também, que as identidades de Jacobi tornam os campos vetoriais Hamiltonianos uma

sub-álgebra da álgebra de Lie de todos os campos vetoriais. Conforme foi estabelecido, esta álgebra é realizada através do comutador:  $[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \mathbf{u}\mathbf{v} - \mathbf{v}\mathbf{u}$  para  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  campos. Ocorre que o comutador de dois campos Hamiltonianos é ele próprio um campo *Hamiltoniano*:

$$[\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B] = -\mathbf{v}_{\{A,B\}}. \quad (3.18)$$

Isto é consequência (não trivial) da identidade de Jacobi. Como a totalidade dos campos Hamiltonianos forma um espaço vetorial linear, formam também uma álgebra de Lie em vista do que foi discutido.

Uma variedade equipada com um colchete de Poisson é uma *variedade de Poisson*[19]. Tais variedades podem ser consideradas o ecossistema dos sistemas de Poisson.

Demonstra-se [5][19] que, na vizinhança de um ponto onde o posto de  $J^{\mu\nu}$  (número de linhas ou colunas linearmente independentes, que é sempre par devido a anti-simetria) é constante e igual a  $2n \leq m$ , existem coordenadas  $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n, c^1, \dots, c^l); l = m - 2n$ , pelas quais o tensor de Poisson se representa por

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

sendo  $I$  a matriz identidade  $n$ -dimensional. Nestas coordenadas, o sistema de Poisson adquire o aspecto

$$\begin{aligned} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}, & \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i}; \\ \dot{c}^j &= 0; & i &= 1, \dots, n; & j &= 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Quando  $l = 0$ , recobra-se o formalismo canônico usual, e o resultado acima é conhecido por *teorema de Darboux*. A obtenção de uma carta de

Darboux, no entanto, pode ser bem difícil, e as coordenadas resultantes podem ter significado físico obscuro. Além disso, o teorema de Darboux não admite transposição para sistemas contínuos [5].

Quando o posto  $2n$  de  $J^{\mu\nu}$  não é máximo, de imediato tem-se  $\det(J^{\mu\nu}) = 0$ , o que implica na existência de  $l = m - 2n$  covetores  $v^j$  tais que  $J^{\mu\nu}v^j_\nu = 0; j = 1, \dots, l$ . Além disso, estes covetores podem ser gradientes de funções  $C^j : M \rightarrow R$ . Em outras palavras, estas funções satisfazem

$$J^{\mu\nu}\partial_\nu C^j = 0; \quad j = 1, \dots, l. \quad (3.21)$$

Pela definição, estas funções tem colchete de Poisson nulo com todas as demais. Mais do que isso: sempre existem na vizinhança de pontos onde o posto de  $J^{\mu\nu}$  não varia [19]. Numa eventual transposição quântica, tais funções  $C^j$  passam a ser operadores que comutam com todos os observáveis no espaço de Hilbert. Daí o seu nome de *funções de Casimir* (embora não comutem tão somente com os geradores de um determinado grupo). Caso não dependam do tempo, estas funções de Casimir são constantes ao longo das trajetórias dinâmicas, pois que tem colchete de Poisson nulo com qualquer Hamiltoniano. Na verdade é isto que permite a existência de coordenadas nas quais o tensor de Poisson é representado por (3.19).

O Hamiltoniano não é, de forma alguma, completamente definido, mesmo quando o tensor de Poisson já está fixado. Adicionar  $G(C)$  a  $H$  não altera as equações de movimento, sendo  $G$  arbitrária e  $C$  uma função de Casimir.

Por outro lado, caso  $\det(J^{\mu\nu}) \neq 0$  em todo  $M$  (o que só é possível se o espaço de fase possuir dimensão par, devido a anti-simetria do tensor de Poisson), então a estrutura de Poisson determina uma estrutura simplética. Uma *forma simplética* em  $M$  é uma 2-forma  $\omega$  fechada não degenerada, isto

é,  $\omega$  satisfaz

$$\mathbf{d}\omega = 0, \quad (3.22)$$

$$\forall \mathbf{u} \neq 0, \quad \exists \mathbf{v} \setminus \omega(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq 0,$$

sendo  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  vetores tangentes. Uma variedade equipada com uma forma simplética é uma *variedade simplética*.

Seja  $\omega = (1/2)\omega_{\mu\nu}\mathbf{d}\mathbf{x}^\mu \wedge \mathbf{d}\mathbf{x}^\nu$ ; dado o tensor de Poisson, as componentes  $\omega_{\mu\nu}$  da forma simplética na base dual  $(\mathbf{d}\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{d}\mathbf{x}^m)$  são exatamente as componentes da matriz inversa de  $J^{\mu\nu}$ :  $\omega_{\mu\nu} = (J^{-1})^{\mu\nu}$ . Mas  $\det(J^{\mu\nu}) \neq 0$  implica na não degenerescência de  $\omega$ ; a identidade de Jacobi (após alguma álgebra [5]) implica na equação *linear*

$$\partial_\rho\omega_{\mu\nu} + \partial_\mu\omega_{\nu\rho} + \partial_\nu\omega_{\rho\mu} = 0, \quad (3.23)$$

o que significa que  $\mathbf{d}\omega = 0$ . Tem-se então uma conexão fundamental entre o caráter de álgebra de Lie da evolução temporal (através do colchete de Poisson) e a geometria simplética subjacente (através da forma simplética), quando o tensor de Poisson admite inversa.

Quando está definida uma métrica Riemmaniana na variedade, tem-se um isomorfismo (mapeamento linear biunívoco) entre  $TM$  e  $T^*M$ , o que permite a tradicional operação de abaixamento e levantamento de índices pela métrica. No caso de uma variedade simplética, existe um isomorfismo semelhante, fornecido pela forma simplética. De fato, o mapeamento  $\theta : TM \rightarrow T^*M$  dado pelo produto interior de  $\omega$  com um vetor tangente  $\mathbf{u}$  associa  $\mathbf{u}$  a 1-forma  $-i_{\mathbf{u}}\omega$  tal que, para um vetor tangente  $\mathbf{v}$ ,

$$\langle -i_{\mathbf{u}}\omega, \mathbf{v} \rangle = \omega(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \quad (3.24)$$

$\theta$  é um isomorfismo, com inversa dada pelo tensor de Poisson. Em coordenadas,

$$\theta : \partial_\mu \rightarrow \omega_{\nu\mu} \mathbf{dx}^\nu, \quad (3.25)$$

$$\theta^{-1} : \mathbf{dx}^\nu \rightarrow J^{\mu\nu} \partial_\mu. \quad (3.26)$$

Como já foi dito, a estrutura simplética só existe quando o posto de  $J^{\mu\nu}$  é máximo. Entretanto, a dinâmica restrita às superfícies nas quais as funções de Casimir são constantes é simplética [5][19]. Estas superfícies “folheam” o espaço de fase, do mesmo modo como uma cebola é folheada por suas camadas, e elas são chamadas *folhas simpléticas*. A estrutura simplética é dada pela restrição do colchete de Poisson à folha simplética.

Em resumo, o espaço de fase dos sistemas de Poisson é mais geral do que uma variedade simplética, sendo folheado por estas, as quais são determinadas invariantemente pelas funções de Casimir. Como exemplo, sejam as equações de Euler para o corpo rígido livre [10][20],

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{L} \times \nabla H(\mathbf{L}), \quad (3.27)$$

sendo  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$  o momentum angular,  $\times$  o produto vetorial,  $\nabla = (\partial/\partial L_1, \partial/\partial L_2, \partial/\partial L_3)$  o gradiente e o Hamiltoniano  $H$  a energia cinética. Ou seja,

$$\begin{aligned} \dot{L}_1 &= (1/I_3 - 1/I_2)L_2L_3, \\ \dot{L}_2 &= (1/I_1 - 1/I_3)L_3L_1, \\ \dot{L}_3 &= (1/I_2 - 1/I_1)L_1L_2, \end{aligned} \quad (3.28)$$

e

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{(L_1)^2}{I_1} + \frac{(L_2)^2}{I_2} + \frac{(L_3)^2}{I_3} \right), \quad (3.29)$$

sendo  $(I_1, I_2, I_3)$  os momentos de inércia do corpo rígido em relação aos eixos de inércia. O tensor de Poisson é representado por

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -L_3 & L_2 \\ L_3 & 0 & -L_1 \\ -L_2 & L_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

e satisfaz a identidade de Jacobi. Mais tarde, será exibida uma derivação desta estrutura de Poisson do corpo rígido livre baseada no processo de redução. O posto de  $J^{\mu\nu}$  é 2 em todo o espaço de fase, menos na origem, onde é nulo. As folhas simpléticas são esferas centradas na origem. A (única) função de Casimir é o quadrado do módulo do momentum angular

$$C = (L_1)^2 + (L_2)^2 + (L_3)^2. \quad (3.31)$$

Introduzindo coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  tais que  $r > 0$ ,  $0 < \theta < \pi$ ,  $0 < \phi < 2\pi$ , segundo  $L_1 = r \cos \theta \sin \phi$ ,  $L_2 = r \sin \theta \sin \phi$ ,  $L_3 = r \cos \phi$ , encontra-se que a restrição do colchete de Poisson às esferas  $r = \text{constante}$  é essencialmente determinada por

$$\{\theta, \phi\}_r = \left( J^{\mu\nu} \frac{\partial \theta}{\partial L_\mu} \frac{\partial \phi}{\partial L_\nu} \right)_r = -\frac{1}{r \sin \phi}. \quad (3.32)$$

Portanto, o colchete de Poisson, restrito as folhas simpléticas, de duas funções  $A$  e  $B$  é fornecido por

$$\{A, B\}_r = -\frac{1}{r \sin \phi} \left( \frac{\partial A}{\partial \theta} \frac{\partial B}{\partial \phi} - \frac{\partial A}{\partial \phi} \frac{\partial B}{\partial \theta} \right). \quad (3.33)$$

Naturalmente, estão sendo consideradas funções  $A$  e  $B$  parametricamente dependentes de  $r$ . O tensor de Poisson correspondente a (3.33) tem posto 2, e determina uma estrutura simplética nas esferas  $r = \text{constante}$ .

As funções de Casimir proporcionam muita informação a respeito da estabilidade do movimento através do método de energia-Casimir [3]. Este método generaliza a idéia de Lyapunov de analisar a estabilidade usando uma função que jamais cresce no decorrer da evolução temporal (por exemplo, um invariante). A existência de várias funções de Casimir constantes pode ser convenientemente utilizada para facilitar o estudo da estabilidade da dinâmica. Na seção 4.3 será considerada a relação entre formalismo Hamiltoniano generalizado e estabilidade.

Para finalizar a seção, serão assinaladas algumas propriedades relevantes do formalismo. Quando existe, a estrutura simplética é preservada pelo fluxo Hamiltoniano, ou seja,

$$\mathbf{L}_{\mathbf{v}_H}\omega = 0. \quad (3.34)$$

Este resultado é provado mediante alguma álgebra, sendo invocado o fato de  $\omega$  ser por definição fechada, e equivale a preservação de  $\mathbf{J}$  pelo fluxo Hamiltoniano. Denotando a dimensão do espaço de fase por  $2n$ , o produto exterior de  $\omega$  consigo própria  $n$  vezes resultará numa  $2n$ -forma  $\mathbf{V}$ ,

$$\mathbf{V} = \omega \wedge \dots \wedge \omega, \quad (3.35)$$

preservada pelo fluxo Hamiltoniano (já que  $\omega$  o é):

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\mathbf{v}_H}\mathbf{V} &= (\mathbf{L}_{\mathbf{v}_H}\omega) \wedge \dots \wedge \omega + \dots + \omega \wedge \dots \wedge (\mathbf{L}_{\mathbf{v}_H}\omega) = \\ &= 0 + \dots + 0 = 0. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Em um certo sentido [11], esta  $2n$ -forma pode ser considerada um volume  $2n$ -dimensional, embora não tenha necessariamente o aspecto canônico  $\mathbf{dx}^1 \wedge \dots \wedge \mathbf{dx}^{2n}$ . A existência de um volume preservado associado à estrutura simplética

é conhecida por teorema de Liouville. Quando a forma simplética é canônica, o teorema de Liouville corresponde à relação

$$\mathbf{L}_{\mathbf{v}_H} \mathbf{V} = (\partial_\mu v_H^\mu) \mathbf{V} = 0. \quad (3.37)$$

Ou seja, recobra-se a não divergência usual dos campos Hamiltonianos canônicos. Existe também uma definição intrínseca de divergência [11], pela qual os campos Hamiltonianos generalizados sempre tem divergência nula.

### 3.2 Teoria de Transformação

Esta curta seção destina-se a exibir a covariância da formulação Hamiltoniana geométrica sob mudanças arbitrárias de coordenadas. Isto é, as equações de movimento possuem caráter Hamiltoniano qualquer que seja a carta utilizada, embora seu aspecto possa variar. Estas observações são evidentes do ponto de vista geométrico, pois  $\mathbf{v}_H = \mathbf{J} \cdot \mathbf{d}H$  é uma equação intrínseca, mas é instrutivo observar concretamente a efetividade do formalismo. De resto, a seção analisa brevemente as transformações canônicas e o Teorema de Noether, os quais tem um papel importante nas teorias Hamiltonianas.

Nas coordenadas  $(x^1, \dots, x^m)$ , o sistema Hamiltoniano é representado por

$$\dot{x}^\mu = J^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \frac{\partial H}{\partial x^\nu}(\mathbf{x}). \quad (3.38)$$

Sejam as coordenadas  $(y^1, \dots, y^m)$ , relacionadas a  $(x^1, \dots, x^m)$  pelas equações

$$y^\mu = \phi^\mu(\mathbf{x}). \quad (3.39)$$

Por hipótese, as equações de transformação admitem inversa ao menos na vizinhança de um ponto. Calculando de (3.38-3.39) a derivada temporal de

$\mathbf{y}$ , encontra-se

$$\dot{y}^\mu = J'^{\mu\nu}(\mathbf{y}) \frac{\partial H'}{\partial y^\nu}(\mathbf{y}), \quad (3.40)$$

sendo que

$$J'^{\mu\nu}(\mathbf{y}) = \frac{\partial \phi^\mu}{\partial x^\rho} J^{\rho\sigma} \frac{\partial \phi^\nu}{\partial x^\sigma}(\mathbf{x}(\mathbf{y})), \quad (3.41)$$

$$H'(\mathbf{y}) = H(\mathbf{x}(\mathbf{y})). \quad (3.42)$$

Assinale-se que (3.41) é justamente a lei de transformação das componentes dos tensores do tipo  $(2, 0)$  sob troca de coordenadas [12]. Por outro lado, diferenciando (3.42) encontra-se a lei de transformação das componentes da 1-forma  $\mathbf{d}H$ :

$$\frac{\partial H}{\partial x^\mu} \rightarrow \frac{\partial \phi^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial H'}{\partial y^\nu}. \quad (3.43)$$

$J'^{\mu\nu}(\mathbf{y})$  dado em (3.41) satisfaz todas as propriedades de um tensor de Poisson, inclusive a identidade de Jacobi, e portanto o sistema (3.40) é um sistema de Poisson, conforme foi antecipado.

Por outro lado, transformações que envolvem o tempo como parâmetro, do tipo

$$y^\mu = \phi^\mu(\mathbf{x}, t), \quad (3.44)$$

destróem o caráter Hamiltoniano, pois

$$\dot{y}^\mu = J'^{\mu\nu}(\mathbf{y}) \frac{\partial H'}{\partial y^\nu}(\mathbf{y}) + \frac{\partial \phi'^\mu}{\partial t}(\mathbf{y}, t), \quad (3.45)$$

sendo  $\phi'^\mu(\mathbf{y}, t) = \phi^\mu(\mathbf{x}(\mathbf{y}), t)$ ,  $\mathbf{J}'$  e  $H'$  definidos como anteriormente.

No formalismo canônico usual, o tensor de Poisson tem uma representação fixa. Logo, o caráter Hamiltoniano dos sistemas usuais só é preservado pelas transformações que mantém invariante a forma do tensor de Poisson, as transformações canônicas. Por analogia, define-se *transformações canônicas* de

sistemas Hamiltonianos generalizados como sendo aquelas mudanças de coordenadas que mantém o tensor de Poisson formalmente invariante (invariância da aparência):

$$J'^{\mu\nu}(\mathbf{y}) = J^{\mu\nu}(\mathbf{y}). \quad (3.46)$$

Tais transformações também são chamadas de *difeomorfismos de Poisson*.

Consideremos com mais detalhe o caso dos difeomorfismos de Poisson continuamente conectados à identidade. Isto é, o caso em que é possível obter todas as informações sobre o mapeamento estudando apenas a sua versão infinitesimal

$$y^\mu = x^\mu + \epsilon \Pi^\mu(\mathbf{x}), \quad (3.47)$$

sendo  $\epsilon$  um parâmetro infinitesimal e  $\Pi^\mu$  uma função analítica. Substituição da lei de transformação infinitesimal na equação (3.46), uso de (3.42) e expansão até primeira ordem em  $\epsilon$  fornece a seguinte condição sobre as funções  $\Pi^\mu$  para que (3.47) seja uma transformação canônica:

$$\{\Pi^\mu, x^\nu\} + \{x^\mu, \Pi^\nu\} = \frac{\partial J^{\mu\nu}}{\partial x^\rho} \Pi^\rho. \quad (3.48)$$

Pode ser demonstrado [18] que existe localmente uma função  $G$  em termos da qual

$$\Pi^\mu = \{x^\mu, G\}. \quad (3.49)$$

Esta expressão realmente é uma solução de (3.48), pois de sua substituição em (3.48) resulta

$$\{\{x^\mu, G\}, x^\nu\} + \{x^\mu, \{x^\nu, G\}\} = \{\{x^\mu, x^\nu\}, G\}. \quad (3.50)$$

Graças a identidade de Jacobi, tal equação é sempre verdadeira.

Relembrando a seção 2.6, pode-se considerar  $\Pi^\mu \partial_\mu$  como sendo o campo vetorial que gera a transformação; analogamente, a função  $G$  é a *geradora escalar* do difeomorfismo de Poisson. A forma de (3.49) mostra que  $\mathbf{\Pi}$  é um campo vetorial Hamiltoniano, sendo  $G$  o Hamiltoniano associado:  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{v}_G$ . Em conseqüência, o fluxo Hamiltoniano  $\Phi_t : M \rightarrow M/\mathbf{x} \mapsto \Phi_t(\mathbf{x})$  constitui um exemplo de transformação canônica. De fato, é possível tomar o tempo como parâmetro e o Hamiltoniano como função geradora da transformação,

$$\Phi_t^\mu(\mathbf{x}) = x^\mu + t\{x^\mu, H\} + O(t^2). \quad (3.51)$$

O campo vetorial Hamiltoniano, portanto, é um gerador de transformações canônicas.

Quando o Hamiltoniano também for formalmente invariante sob um difeomorfismo de Poisson, as equações de movimento são formalmente invariantes. Esta simetria permite obter uma lei de conservação associada. Realmente, a invariância formal de  $H$  sob a transformação induzida por  $\mathbf{\Pi}$  equivale a  $\mathbf{L}_\mathbf{\Pi}H = 0$ , o que se verifica usando  $H(\mathbf{x} + \epsilon\mathbf{\Pi}) = H(\mathbf{x})$ . Com isto,

$$\mathbf{L}_\mathbf{\Pi}H = \mathbf{\Pi}(H) = \langle \mathbf{d}H, \mathbf{\Pi} \rangle = 0. \quad (3.52)$$

Porém, como o campo vetorial induz uma transformação canônica,

$$\langle \mathbf{d}H, \mathbf{\Pi} \rangle = \langle \mathbf{d}H, \mathbf{v}_G \rangle = \{H, G\} = 0. \quad (3.53)$$

A penúltima igualdade decorre da definição intrínseca do colchete de Poisson. A conclusão é que se a função  $G$  independer do tempo então  $G$  é uma constante de movimento. Isto é,  $\{H, G\} = 0$ . Esta é a versão Hamiltoniana do *Teorema de Noether*, o qual associa uma lei de conservação a cada transformação infinitesimal que mantém idênticas as equações de movimento.

Os difeomorfismos de Poisson são o grupo de transformações das teorias Hamiltonianas no mesmo sentido que as isometrias são o grupo da Teoria da Relatividade Geral. Neste caso, a geometria subjacente está representada por uma métrica Riemmaniana, por definição preservada por isometrias. Mais uma vez verifica-se a analogia entre tensor de Poisson e métrica Riemmaniana.

### 3.3 *Mecânica de Nambu e Quantização*

O teorema de Liouville é de fundamental importância na Mecânica Estatística. De fato, o conceito de probabilidade de ocupação de um micro-estado pressupõe o teorema de Liouville. Motivado por isto, Nambu [21] propôs certas equações cujo fluxo preserva o volume no espaço de fase. O objetivo primordial foi ampliar as fronteiras da Mecânica Estatística para sistemas físicos mais gerais que os modelados pelo formalismo canônico usual.

Nesta seção, será discutida a Mecânica de Nambu dando ênfase à sua condição de caso particular da Mecânica de Poisson. Isto nos possibilitará ilustrar algumas características fundamentais dos sistemas de Poisson. Também haverá comentários sobre alguns tópicos relacionados à quantização de sistemas clássicos com colchete de Poisson não trivial, outra das motivações de Nambu.

Será descrita a Mecânica de Nambu. Considere-se um espaço de fase com dimensão  $n$ , possivelmente ímpar, com coordenadas  $(x^1, \dots, x^n)$ . Sejam também  $(n - 1)$  constantes de movimento independentes do tempo  $(H_2(\mathbf{x}), \dots, H_n(\mathbf{x}))$ . Nambu postulou o seguinte sistema dinâmico ( $\alpha_1$  é um

índice genérico, bem como os demais  $\alpha$ 's):

$$\dot{x}^{\alpha_1} = \epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n} \frac{\partial H_2}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial H_n}{\partial x^{\alpha_n}}; \quad \alpha_j = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.54)$$

Acima,  $\epsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n}$  são as componentes do tensor totalmente anti-simétrico de Levi-Civita, com  $\epsilon^{12 \dots n} = 1$ . A propriedade de anti-simetria do tensor de Levi-Civita assegura que o fluxo tem divergência usual nula ( $\partial \dot{x}^{\alpha_1} / \partial x^{\alpha_1} = 0$ ). Isto garante o teorema de Liouville.

Pode-se representar o modelo de Nambu usando Jacobianos:

$$\dot{x}^{\alpha_1} = \frac{\partial(x^{\alpha_1}, H_2, \dots, H_n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)}. \quad (3.55)$$

De um modo geral, a evolução temporal de uma função no espaço de fase é dada por

$$\dot{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial(F, H_2, \dots, H_n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (3.56)$$

A equação acima permite observar claramente que os  $H_i$  são realmente constantes ao longo das trajetórias de fase, pois que são independentes do tempo.

A forma das equações de movimento sugeriu a Nambu a introdução do colchete multilinear

$$\{F_1, \dots, F_n\} = \frac{\partial(F_1, F_2, \dots, F_n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \quad (3.57)$$

como a entidade algébrica essencial da sua mecânica. As equações de Nambu tomam o aspecto

$$\dot{x}^{\alpha_1} = \{x^{\alpha_1}, H_2, \dots, H_n\}. \quad (3.58)$$

O colchete de Nambu fundamental é  $\{x^1, \dots, x^n\} = 1$ . Entendendo as transformações canônicas como sendo aquelas que mantêm a estrutura da teoria, as transformações “canônicas” de Nambu são as que mantêm o colchete

de Nambu inalterado. Com símbolos, se  $x^\mu \rightarrow y^\mu = \phi^\mu(\mathbf{x})$  é uma troca de variáveis “canônica”, então

$$\{\phi^1, \dots, \phi^n\} = \{x^1, \dots, x^n\} = 1. \quad (3.59)$$

Estas transformações formam o grupo dos mapeamentos com Jacobiano unitário (preservam volume):

$$\frac{\partial(\phi^1, \dots, \phi^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} = 1. \quad (3.60)$$

Na Mecânica de Nambu, os “Hamiltonianos” ( $H_2, \dots, H_n$ ) estão em pé de igualdade. Entretanto, destacando-se um deles, digamos  $H_n$ , pode-se escrever o sistema de Nambu conforme

$$\dot{x}^\mu = J_{(N)}^{\mu\nu} \partial_\nu H_n, \quad (3.61)$$

sendo que

$$J_{(N)}^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}\nu} \frac{\partial H_2}{\partial x^{\alpha_2}} \dots \frac{\partial H_{n-1}}{\partial x^{\alpha_{n-1}}}. \quad (3.62)$$

É notável que  $J_{(N)}^{\mu\nu}$  acima definido possua todos os atributos necessários para a implementação de um colchete de Poisson no espaço de fase [23]-[25]! Em outras palavras, o formalismo de Nambu é um caso particular da Mecânica Hamiltoniana generalizada. Neste contexto, as constantes de movimento relegadas a um plano secundário são funções de Casimir com relação a  $J_{(N)}^{\mu\nu}$ . Por outro lado, há que se notar que as transformações canônicas no sentido de Nambu não preservam a forma do tensor de Poisson, ou seja, não são transformações canônicas no sentido de Poisson [25].

Um tensor  $\mathbf{J}$  com componentes

$$J^{\mu\nu} = \frac{1}{M} J_{(N)}^{\mu\nu}, \quad (3.63)$$

sendo  $M$  uma função arbitrária (contanto que não assuma jamais o valor nulo), também é aceitável como realização de um tensor de Poisson. A identidade de Jacobi permanece válida [23]. Quando as equações dinâmicas são  $\dot{x}^\mu = J^{\mu\nu} \partial_\nu H$  para algum Hamiltoniano  $H$  e  $J^{\mu\nu}$  dado acima, têm-se que

$$\partial_\mu(MJ^{\mu\nu}\partial_\nu H) = 0. \quad (3.64)$$

Ou seja, multiplicação das componentes do campo dinâmico por  $M$  leva a um campo de divergência nula. A função  $M$  é dita *último multiplicador* [26]. Conhecendo-se  $(n - 1)$  constantes de movimento independentes do tempo  $H(\mathbf{x})_i$ ;  $i = 2, \dots, n$ , sempre é possível encontrar um último multiplicador. Geometricamente, tal se deve ao fato das trajetórias serem tangentes às  $(n - 1)$  superfícies  $H_i = h_i$ ,  $h_i$  constante. Por isto, necessariamente o campo  $\dot{\mathbf{x}}$  é proporcional a  $\mathbf{J}_{(N)} \cdot \mathbf{d}H_n$ . Daí a existência do multiplicador. A estrutura Hamiltoniana, portanto, está realizada. Este caminho, entretanto, não é prático, pois pressupõe conhecer as trajetórias completamente (sinônimo do conhecimento de  $(n - 1)$  invariantes autônomos).

A quantização de sistemas clássicos não modelados por variáveis canônicas é uma das motivações do estudo dos sistemas de Poisson. Podem ser citados os trabalhos de Pauli [27] sobre a quantização de teorias de campo não locais, de Martin [28] e Sherry [29] que consideraram espaços de fase com variáveis fermiônicas, de Dirac [30] sobre a quantização de sistemas com Lagrangianos singulares, a Mecânica Hadrônica de Santilli [18] e os modelos simplificados da gravidade quântica de Hojman *et al.* [4].

Essencialmente, *quantizar* um modelo clássico pelo método de Dirac [31][32] significa: a) substituir as funções no espaço de fase por operadores num espaço de Hilbert (estes operadores satisfazem uma álgebra não comuta-

tiva oriunda, de algum modo, da estrutura algébrica clássica); b) dadas as equações de movimento clássicas, estabelecer equações de evolução quânticas.

Com respeito ao item a), se a álgebra clássica estiver contida nas componentes do tensor de Poisson  $J^{\mu\nu} = \{x^\mu, x^\nu\}$ , a álgebra quântica será dada pelo comutador

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = \hat{x}^\mu \hat{x}^\nu - \hat{x}^\nu \hat{x}^\mu = i\hbar \hat{J}^{\mu\nu}. \quad (3.65)$$

Acima e no que segue, um chapéu indica operador. Uma dificuldade evidente é a de como ordenar os termos que compõem o operador  $\hat{J}^{\mu\nu}$ , que pode advir de uma função clássica complicada. Por sinal, um problema comum à quantização embasada no formalismo canônico e à embasada na Mecânica de Poisson é a questão do ordenamento dos termos dos operadores obtidos das funções clássicas.

Em sua mecânica, Nambu tomou o colchete multilinear  $\{x^1, \dots, x^n\}$  como sendo a estrutura algébrica fundamental, e procurou quantizar a partir daí. Infelizmente, a Mecânica Quântica assim obtida incorria em inconsistências internas [23].

Por outro lado, se as equações de movimento clássicas forem  $\dot{x}^\mu = \{x^\mu, H\}$ , o item b) traduz-se por

$$\frac{d\hat{x}^\mu}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{x}^\mu, H], \quad (3.66)$$

que são as equações de Heisenberg. Mesmo esta prescrição não é completamente imune a suspeitas. Que critérios objetivos se deve tomar para a escolha do Hamiltoniano clássico a partir do qual se fará a quantização? Apesar da respeitabilidade quase mística da energia, do ponto de vista matemático qualquer função  $F$  que satisfaça  $\dot{x}^\mu \partial_\mu F = 0$  é aceitável. Vale também questionar se quantizações baseadas em Hamiltonianos diferentes são, em algum sentido,

unitariamente equivalentes.

Como se constata, existe ainda uma série de controvérsias sobre a quantização de sistemas de Poisson que, evidentemente, se transferem à quantização embasada no formalismo canônico usual. A atitude de rejeitar as dúvidas levantadas como irrelevantes com certeza é desaconselhável e pouco crítica.

Como exemplo da Mecânica de Nambu, será tratado com detalhe o caso tridimensional [9]. Neste caso, as equações de Nambu (3.54) possuem a forma

$$\dot{x}^{\alpha_1} = \epsilon^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \frac{\partial H_2}{\partial x^{\alpha_2}} \frac{\partial H_3}{\partial x^{\alpha_3}}, \quad (3.67)$$

ou seja,

$$\dot{\mathbf{x}} = \nabla H_2 \times \nabla H_3. \quad (3.68)$$

As trajetórias são tangentes às superfícies de nível  $H_2 = \text{constante}$  e  $H_3 = \text{constante}$ , devido às propriedades do produto vetorial. Isto assegura que tanto  $H_2$  quanto  $H_3$  seriam Hamiltonianos aceitáveis num formalismo de Poisson.

Tomando o exemplo explícito determinado pelas escolhas

$$H_2 = \frac{1}{2} \left( (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \right), \quad (3.69)$$

$$H_3 = \frac{1}{2} \left( \frac{(x^1)^2}{I_1} + \frac{(x^2)^2}{I_2} + \frac{(x^3)^2}{I_3} \right), \quad (3.70)$$

as equações (3.68) tornam-se exatamente as equações de Euler do corpo rígido livre tratadas anteriormente, fazendo a identificação  $(x^1, x^2, x^3) = (L_1, L_2, L_3)$ :

$$\dot{x}^1 = (1/I_3 - 1/I_2)x^2x^3,$$

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 &= (1/I_1 - 1/I_3)x^3x^1, \\ \dot{x}^3 &= (1/I_2 - 1/I_1)x^1x^2.\end{aligned}\tag{3.71}$$

A diferença entre os enfoques de Poisson e Nambu é que neste as duas constantes de movimento, energia cinética  $H_3$  e o quadrado do momentum angular  $2H_2$ , comparecem em pé de igualdade.

### 3.4 Estabilidade e Formulações de Poisson

A estabilidade dos estados de equilíbrio de um dado sistema dinâmico é de importância fundamental. Trata-se de uma questão importante tanto para o entendimento qualitativo das soluções das equações diferenciais quanto para fins mais concretos como aplicações na Engenharia. A maioria dos estudos encontráveis na literatura recorre a uma linearização das equações de movimento na vizinhança do equilíbrio. Nesta seção, será exposto um método não-linear de análise da estabilidade dos estados de equilíbrio. Trata-se do método dito de *energia-Casimir*[10], que vem ganhando popularidade crescente, em conexão com avanços na teoria das formulações Hamiltonianas. A seção limitar-se-á a uma breve exposição de conceitos fundamentais. Para uma análise mais profunda pode-se consultar as referências [9] e [33]. No capítulo cinco, a estabilidade de algumas soluções estacionárias de sistemas de Poisson será tratada à luz do método de energia-Casimir.

Considere um sistema dinâmico

$$\dot{x}^\mu = v^\mu(\mathbf{x}),\tag{3.72}$$

autônomo. Um *estado* ou *ponto de equilíbrio*, ou ainda um *ponto crítico*  $\mathbf{x}_e$

por definição satisfaz

$$v^\mu(\mathbf{x}_e) = 0. \quad (3.73)$$

A estabilidade de  $\mathbf{x}_e$  refere-se ao comportamento das trajetórias próximas a  $\mathbf{x}_e$ . Diz-se que o ponto crítico é *estável* se soluções com condição inicial perto de  $\mathbf{x}_e$  continuam nesta vizinhança por todo tempo futuro. Em diversas ocasiões, mesmo a existência de soluções lisas em todo tempo é questionável. Assim, via de regra, estuda-se a *estabilidade condicional*, válida enquanto existem soluções.

Podem ser concebidas várias formas de tornar precisa a noção de estabilidade. Um ponto crítico  $\mathbf{x}_e$  é dito *linearmente estável* se a dinâmica linearizada em torno de  $\mathbf{x}_e$

$$\frac{d}{dt}\delta x^\mu(t) = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\nu}(\mathbf{x}_e)\delta x^\nu(t) \quad (3.74)$$

é limitada. Acima,  $\delta\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e$  denota a perturbação em relação ao equilíbrio. Em outras palavras, há estabilidade linear se a solução  $\delta\mathbf{x}(t)$  de (3.74) permanece finita.

Outro tipo de estabilidade é a *estabilidade espectral*. Neste contexto,  $\mathbf{x}_e$  é estável se a matriz do operador de evolução linearizado,  $\partial v^\mu(\mathbf{x}_e)/\partial x^\nu$ , não tem autovalor  $\lambda$  com parte real positiva. A idéia é substituir em (3.74)  $\delta x^\mu(t) = \exp(\lambda t)\delta x^\mu(0)$  como proposta de solução. Isto determina o espectro do operador de evolução linearizado. Parte real positiva de  $\lambda$  corresponde a crescimento exponencial da perturbação  $\delta x^\mu(0)$ .

Estabilidade espectral é pré-requisito para a estabilidade linear. De fato, por definição, a dinâmica linearizada em torno de um equilíbrio instável espectralmente exhibe soluções que vão ao infinito. Além disso, instabili-

dade linear acarreta instabilidade espectral. Entretanto, a estabilidade espectral não basta para a estabilidade linear. Por exemplo, seja o equilíbrio  $(p_e, q_e) = (0, 0)$  correspondente às equações canônicas advindas do Hamiltoniano  $H = p^2/2 + q^4/4$ . Este equilíbrio é espectralmente estável, mas linearmente instável. Realmente, neste caso obtém-se a seguinte linearização:

$$d\delta p/dt = 0, \quad d\delta q/dt = \delta p. \quad (3.75)$$

O único autovalor do operador de evolução linearizado é zero, mas a dinâmica linear não é limitada:

$$\delta p(t) = \delta p(0), \quad \delta q(t) = \delta q(0) + t\delta p(0). \quad (3.76)$$

Na verdade, as análises espectral e linear são evidentemente simplificações. O conceito mais forte de estabilidade é o de *estabilidade não-linear*. Um equilíbrio  $\mathbf{x}_e$  é não-linearmente estável se, para toda vizinhança  $U$  de  $\mathbf{x}_e$  existe uma vizinhança  $V$  de  $\mathbf{x}_e$  tal que trajetórias  $\mathbf{x}(t)$  inicialmente em  $V$  jamais deixam  $U$ .

À dimensão finita, que é a situação abordada nesta dissertação, a *estabilidade formal* é suficiente para a estabilidade não-linear. Diz-se que  $\mathbf{x}_e$  é formalmente estável se há uma constante de movimento  $H_C$  com ponto crítico em  $\mathbf{x}_e$  e convexa em  $\mathbf{x}_e$ . Ou seja, a primeira variação  $\delta H_C(\mathbf{x}_e)$  desta função é nula e a segunda variação  $\delta^2 H_C(\mathbf{x}_e)$  é definida no equilíbrio. Em termos simbólicos,  $(\partial H_C / \partial x^\mu)(\mathbf{x}_e) = 0$  e a matriz  $(\partial^2 H_C / \partial x^\mu \partial x^\nu)(\mathbf{x}_e)$  possui autovalores de sinal idêntico (é definida). Geometricamente  $\mathbf{x}_e$  é um mínimo ou máximo da superfície  $H_C = \text{constante}$ . Note-se que a estabilidade formal não é necessária para a estabilidade não-linear. O último exemplo não é

formalmente estável, embora seja evidentemente estável (o equilíbrio é um mínimo do potencial).

A justificativa do conceito de estabilidade formal pode ser entendida por um argumento heurístico. Imaginem-se as superfícies de nível de  $H_C$  no espaço de fase numa vizinhança do ponto de equilíbrio. Para um máximo ou mínimo, estas superfícies serão compactas (finitas e fechadas). Se o equilíbrio é perturbado num dado instante, o sistema recairá numa superfície de nível próxima e permanecerá aí no tempo subsequente. Isto graças ao fato de  $H_C$  ser conservado: as trajetórias se dão com valores constantes de  $H_C$ . Daí segue imediatamente a estabilidade.

Entretanto, vale lembrar que em dimensões infinitas ocorrem particularidades analítico-funcionais que impedem que a estabilidade formal seja suficiente para a não-linear. A topologia do espaço de fase (no caso, um espaço funcional) tem um papel importante nesta questão [3].

Finalmente, é importante assinalar que estabilidade linear não garante estabilidade formal. Por exemplo, seja a dinâmica canônica derivada do Hamiltoniano [33][34]

$$H = \frac{1}{2}\omega_2(p_2^2 + q_2^2) - \frac{1}{2}\omega_1(p_1^2 + q_1^2) + \frac{\alpha}{2}[2q_1p_1p_2 - q_2(q_1^2 - p_1^2)], \quad (3.77)$$

com  $\omega_{1,2} > 0$  e  $\alpha$  constantes. A origem é um equilíbrio linearmente estável, mas ocorre que  $\partial^2 H / \partial x^\mu \partial x^\nu(0)$  não é definida graças ao sinal negativo no segundo termo de  $H$ . Além disso, na vizinhança da origem existem condições iniciais correspondentes a soluções que divergem em tempo finito. De resto, sistemas Hamiltonianos com três ou mais graus de liberdade podem exibir o fenômeno da difusão de Arnold. Este é um mecanismo capaz de tornar instável um equilíbrio linearmente estável.

O método de energia-Casimir fornece condições suficientes para a estabilidade não-linear. Considera-se abaixo apenas sua versão mais simples, adaptada a problemas de dimensão finita. Nestes casos, a proposta básica é obter critérios para a estabilidade formal.

O método de energia-Casimir compõe-se de quatro etapas (a dimensão finita), expostas no que segue.

#### A. Formulação Hamiltoniana.

Encontrar um Hamiltoniano  $H$  e um colchete de Poisson  $\{, \}$  tais que a dinâmica adquira caráter Hamiltoniano:

$$\dot{x}^\mu = \{x^\mu, H\}. \quad (3.78)$$

#### B. Constantes de Movimento.

O objetivo desta etapa é arrolar constantes de movimento que auxiliem na determinação de critérios para a estabilidade formal. Uma abordagem útil é procurar funções de Casimir do colchete de Poisson. Isto é, as funções  $C^j : M \rightarrow R$  que satisfazem  $J^{\mu\nu} \partial_\nu C^j = 0$ . Frequentemente esta tarefa pode ser feita por inspeção. Outros invariantes eventualmente presentes além das funções de Casimir devem ser levados em consideração também, evidentemente.

#### C. Primeira Variação.

Relacionar o equilíbrio  $\mathbf{x}_e$  às constantes  $C$  requerendo que

$$H_C = H + G(C) \quad (3.79)$$

tenha um ponto crítico em  $\mathbf{x}_e$ , para alguma função ajustável  $G(C)$ . Foi tomado o caso em que há somente uma função  $C$ , apenas por clareza na notação. A função  $H_C$  é chamada de função de energia-Casimir. A rigor,

não é garantida a existência da função de energia-Casimir apropriada, isto é, com valor estacionário no equilíbrio. Porém, os exemplos tratados nesta dissertação não oferecem problemas neste sentido.

#### D. Segunda Variação. Estabilidade Formal.

Analizar em que condições a segunda variação  $\delta^2 H_C(\mathbf{x}_e)$  é definida. Isto é, verificar se os autovalores de  $\partial^2 H_C / \partial x^\mu \partial x^\nu(\mathbf{x}_e)$  são todos não nulos e de mesmo sinal. Uma vez atestada a estabilidade formal, encerra-se a análise, a qual é suficiente mas não necessária para a estabilidade.

A linearização do movimento na vizinhança de um equilíbrio formalmente estável de acordo com o método de energia-Casimir possui belas características. Para observá-las, note-se que a dinâmica também pode ser representada por

$$\dot{x}^\mu = J^{\mu\nu}(\mathbf{x}) \partial_\nu H_C(\mathbf{x}). \quad (3.80)$$

Isto é, a adição de uma função arbitrária de  $C$  ao Hamiltoniano não muda as equações de evolução (considerando que não existem constantes de movimentos além das funções de Casimir). Linearizando o movimento em torno de  $\mathbf{x}_e$ , o qual satisfaz  $\partial_\nu H_C(\mathbf{x}_e) = 0$ , pelo critério da primeira variação, obtém-se

$$\frac{d}{dt} \delta x^\mu = J^{\mu\nu}(\mathbf{x}_e) \frac{\partial}{\partial \delta x^\nu} \delta^2 H_C, \quad (3.81)$$

sendo que

$$\delta^2 H_C = (1/2)(\partial^2 H_C / \partial x^\rho \partial x^\sigma)(\mathbf{x}_e) \delta x^\rho \delta x^\sigma. \quad (3.82)$$

Ou seja, a dinâmica linearizada é *Hamiltoniana* com respeito ao tensor de Poisson constante  $J^{\mu\nu}(\mathbf{x}_e)$  e ao Hamiltoniano  $\delta^2 H_C$ . A estabilidade linear pode ser provada em decorrência disto. De fato, as trajetórias  $\delta \mathbf{x}(t)$  permanecerão nas superfícies de nível do Hamiltoniano  $\delta^2 H_C$ . Mas estas su-

perfícies são compactas, já que o equilíbrio é um máximo ou mínimo local.  
Daí segue a estabilidade linear.

### 3.5 O Problema Inverso da Mecânica

O *Problema Inverso da Mecânica* consiste em descobrir se um dado sistema dinâmico é dedutível de um determinado princípio variacional. Esta questão está intimamente ligada à possibilidade de encontrar estruturas de Poisson associadas a um conjunto de equações. Nesta seção serão discutidas as conexões entre sistemas de Poisson e sistemas advindos de princípios variacionais. Ao mesmo tempo, será preparado terreno para o próximo capítulo, destinado à construção de um método de obtenção de estruturas de Poisson.

O Problema Inverso da Mecânica possui uma história extensa, e ainda é um campo de pesquisa bastante ativo. Suas diversas formulações e implicações estão expostas por Santilli, o grande responsável pela popularização do Problema Inverso nos últimos anos, em [17] e [18].

Serão analisados apenas os resultados do Problema Inverso diretamente relevantes para o presente estudo. Será dada atenção basicamente aos chamados sistemas Birkhoffianos [18], tratados por Birkhoff [36]. Inicialmente, serão enumerados alguns fatos elementares que motivaram a introdução destes sistemas.

Seja o espaço de fase tradicional, algum fibrado cotangente, sendo descrito por  $n$  momenta  $(p_1, \dots, p_n)$  e  $n$  coordenadas canonicamente conjugadas  $(q^1, \dots, q^n)$ . As trajetórias dinâmicas unindo condições iniciais  $(\mathbf{p}(t_1), \mathbf{q}(t_1))$  e finais  $(\mathbf{p}(t_2), \mathbf{q}(t_2))$ , segundo o princípio de Hamilton modificado [35], são aquelas que extremizam o funcional da ação,

$$S^0[\mathbf{p}, \mathbf{q}] = \int_{t_1}^{t_2} dt (p_\mu \dot{q}^\mu - H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)). \quad (3.83)$$

Estas trajetórias são obtidas das equações de Hamilton canônicas com

Hamiltoniano dado por  $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ . O super-índice “0” no funcional da ação tem uma justificativa que logo ficará clara.

Conforme vem sendo dito desde a introdução desta dissertação, as equações de Hamilton canônicas não são capazes de modelar, nas coordenadas e tempo originais, um grande número de sistemas dinâmicos. Daí a importância do estudo de formulações mais gerais. Neste espírito, o integrando no funcional da ação será generalizado de um modo natural.

Note que o integrando na ação é linear nas derivadas primeiras  $\dot{q}^\mu$ . Reescreveremos a ação sugestivamente como

$$S^0[\mathbf{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt (R_\mu^0(\mathbf{x}) \dot{x}^\mu - H(\mathbf{x}, t)), \quad (3.84)$$

sendo que

$$x^\mu = \begin{cases} p_\mu, & \mu = 1, \dots, n; \\ q^\mu, & \mu = n + 1, \dots, 2n \end{cases} \quad (3.85)$$

e

$$R_\mu^0 = \begin{cases} 0, & \mu = 1, \dots, n; \\ p_\mu, & \mu = n + 1, \dots, 2n. \end{cases} \quad (3.86)$$

A forma das funções  $R_\mu^0(\mathbf{x})$  leva às equações de Hamilton tradicionais. A ação será generalizada permitindo que tenha como integrando a dependência linear mais geral possível nas velocidades  $\dot{x}^\mu$ . Com isto, obtém-se a *ação Pfaffiana* [18]

$$S[\mathbf{x}] = \int_{t_1}^{t_2} dt (R_\mu(\mathbf{x}, t) \dot{x}^\mu - B(\mathbf{x}, t)), \quad (3.87)$$

com  $R_\mu$  e  $B$  funções arbitrárias. Aplicando o princípio de Hamilton modificado a este funcional (seja qual for a dimensão do espaço de fase), encontram-se as *equações de Birkhoff*

$$(\partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu) \dot{x}^\nu = \partial_\mu B + \partial_t R_\mu, \quad (3.88)$$

sendo que  $\partial_t = \partial/\partial t$ . A função  $B$  é chamada de *Birkhoffiano*.

As equações de Birkhoff são *universais* [37], no sentido em que qualquer sistema dinâmico num espaço de dimensão par

$$\dot{x}^\mu = v^\mu(\mathbf{x}, t); \quad \mu = 1, \dots, 2n \quad (3.89)$$

equivale, localmente, a um sistema de Birkhoff nas coordenadas e tempo  $(\mathbf{x}, t)$ . Isto é, existem funções  $B$  e  $(R_1, \dots, R_n)$  tais que

$$(\partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu)v^\nu = \partial_\mu B + \partial_t R_\mu. \quad (3.90)$$

Com uma transformação de coordenadas e tempo apropriada, é possível colocar as equações de Birkhoff na forma Hamiltoniana canônica. Este é o *teorema de Lie-Koenigs* [26], o qual é de caráter local. Naturalmente, em casos genéricos, é muito difícil encontrar a mudança de variáveis adequada, e esta fatalmente só tem validade local. Além disso, do ponto de vista da intuição, é mais apropriado trabalhar com as coordenadas e tempo originais do observador.

Uma das características fundamentais dos sistemas de Birkhoff é a existência de uma geometria simplética subjacente. De fato, a 2-forma  $\omega = (1/2)w_{\mu\nu}\mathbf{dx}^\mu \wedge \mathbf{dx}^\nu$  é simplética, com

$$w_{\mu\nu} = \partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu. \quad (3.91)$$

Esta estrutura simplética depende explicitamente do tempo. Embora esta não seja uma ocorrência comum na geometria diferencial, trata-se de um fenômeno corriqueiro em construções práticas de modelos de Birkhoff [18] ou de Poisson, conforme será visto nesta dissertação. A presença do parâmetro temporal em  $\omega$  acarreta algumas questões técnicas [38]. Por outro lado, o

aparecimento do tempo na forma simplética é essencial para a universalidade, no sentido exposto, das equações de Birkhoff [39].

Provavelmente, a universalidade das descrições Birkhoffianas é o grande resultado da história do Problema Inverso da Mecânica. Deve-se observar, entretanto, que esta conclusão é apenas uma garantia da existência em nível local da formulação variacional. A obtenção da estrutura Birkhoffiana é um problema paralelo.

Não é objetivo deste estudo fazer a discussão detalhada da Mecânica de Birkhoff. Apenas será analisada a equivalência ou não entre os dois formalismos, de Birkhoff e de Poisson.

Observe-se que o princípio variacional aplicado a ações Pfaffianas leva as equações de Birkhoff

$$\Omega_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)\dot{x}^\nu = D_\mu(\mathbf{x}, t), \quad (3.92)$$

sendo utilizada a notação

$$\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu, \quad (3.93)$$

$$D_\mu = \partial_\mu B + \partial_t R_\mu. \quad (3.94)$$

Ou seja, as equações originais  $\dot{x}^\mu = v^\mu(\mathbf{x}, t)$  só serão descritas pelo princípio variacional indiretamente, após inversão da matriz  $\Omega_{\mu\nu}$ . Resta reescrever as equações de Birkhoff conforme

$$\dot{x}^\mu = \Omega^{\mu\nu} D_\nu \equiv v^\mu. \quad (3.95)$$

Acima,  $\Omega^{\mu\nu}$  é a matriz inversa de  $\Omega_{\mu\nu}$ .

Conclui-se que sistemas dinâmicos em espaços de dimensão ímpar *jámais* são deriváveis de um princípio variacional de Pfaff, pois não existe a inversa

de  $\Omega_{\mu\nu}$  (a anti-simetria leva a  $\det(\Omega_{\mu\nu}) = 0$ , em espaços de dimensão ímpar). Neste sentido, o formalismo de Poisson é mais geral, pois se aplica a espaços de fase de dimensão arbitrária. De outra parte, mesmo se a dimensão do espaço for par, não existe teorema que garanta a existência de uma descrição de Poisson. Por este aspecto, a Mecânica de Birkhoff é mais geral.

Quando  $\partial_t \Omega_{\mu\nu} = 0$  e  $\det(\Omega_{\mu\nu}) \neq 0$ , existe uma descrição de Poisson naturalmente associada a uma descrição de Birkhoff. De fato, neste caso basta isolar as velocidades nas equações de Birkhoff, obtendo

$$\dot{x}^\mu = \Omega^{\mu\nu} \partial_\nu B. \quad (3.96)$$

No modelo de Poisson, o Hamiltoniano pode ser tomado como sendo o Birkhoffiano, e as componentes do tensor de Poisson podem ser tomadas como os elementos da matriz  $\Omega^{\mu\nu}$ . Todas as propriedades de uma estrutura de Poisson são verificadas. Reciprocamente, quando se tem um sistema Hamiltoniano generalizado (3.2) com tensor de Poisson autônomo e não degenerado ( $\det(J^{\mu\nu}) \neq 0$ ), tem-se um sistema de Birkhoff associado. Basta encontrar a inversa  $\omega_{\mu\nu}$  de  $J^{\mu\nu}$  e reescrever as equações de movimento conforme

$$\omega_{\mu\nu} \dot{x}^\nu = \partial_\mu H. \quad (3.97)$$

Relembramos que as identidades de Jacobi satisfeitas pelo tensor de Poisson acarretam que a forma  $\omega$  de componentes dadas por  $\omega_{\mu\nu}$  é fechada, isto é,  $\mathbf{d}\omega = 0$  (ver eq. (3.23)). O lema de Poincaré neste caso garante a existência, localmente, de uma 1-forma  $\mathbf{R} = R_\mu \mathbf{d}x^\mu$  tal que  $\omega = \mathbf{d}\mathbf{R}$ . Em coordenadas,

$$\omega = \frac{1}{2} (\partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu) \mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu. \quad (3.98)$$

Definindo o Birkhoffiano como sendo o Hamiltoniano e encontrando a 1-forma  $\mathbf{R}$ , tem-se os elementos básicos do formalismo de Birkhoff.

Como ilustração, será apresentada a formulação Birkhoffiana do movimento não relativístico de uma partícula carregada sob ação de um campo magnético [40]. Antes disso, será revista a descrição canônica deste movimento. Como é bem sabido, nesta formulação a dinâmica está contida no Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m}(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{q}, t))^2 + e\phi(\mathbf{q}, t), \quad (3.99)$$

sendo  $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{P})$  a posição no espaço de fase,  $\mathbf{A}$  o potencial vetor,  $\phi$  o potencial escalar,  $m$  a massa,  $e$  a carga e  $c$  a velocidade da luz. As coordenadas  $(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  são de uma carta de Darboux, isto é, a forma simplética tem aspecto canônico,

$$\omega = d\mathbf{P}_i \wedge d\mathbf{q}^i. \quad (3.100)$$

Na última equação e no resto desta seção, os índices latinos variam de um a três e os gregos de um a seis. As equações de Hamilton tem a aparência tradicional, e são dadas por

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial P_i} = \frac{1}{m}(P_i - \frac{e}{c}A_i) \quad (3.101)$$

e

$$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} = -\frac{e}{mc} \frac{\partial A_j}{\partial q^i} (P_j - \frac{e}{c}A_j) + e \frac{\partial \phi}{\partial q^i}, \quad (3.102)$$

que, combinadas, resultam na equação de Lorentz escrita em termos dos potenciais,

$$m\ddot{q}^i = -e \frac{\partial \phi}{\partial q^i} - \frac{e}{c} \frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{e}{c} \left( \frac{\partial A_j}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i}{\partial q^j} \right) \dot{q}^j. \quad (3.103)$$

É importante observar que o momentum canônico  $\mathbf{P}$  não é o momentum mecânico  $m\dot{\mathbf{q}}$ ,

$$\mathbf{P} = m\dot{\mathbf{q}} + \frac{e}{c}\mathbf{A}. \quad (3.104)$$

Na verdade, tradicionalmente o campo magnético é incluído no formalismo introduzindo o potencial  $\mathbf{A}$  e modificando o momentum pela regra  $\mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P} + e\mathbf{A}/c$  (o campo magnético, então, é  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ).

Por outro lado, a descrição de Birkhoff tem por elementos o Birkhoffiano

$$B = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + e\phi(\mathbf{q}, t), \quad (3.105)$$

e as funções  $R_\mu$  dadas por

$$R_\mu = \begin{cases} p_\mu + eA_\mu/c, & \mu = 1, 2, 3; \\ 0, & \mu = 4, 5, 6. \end{cases}, \quad (3.106)$$

O estado da partícula é especificado pelas variáveis  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ . As equações de Birkhoff  $\Omega_{\mu\nu}\dot{x}^\nu = \partial_\mu B + \partial_t R_\mu$ , com  $\Omega_{\mu\nu} = \partial_\mu R_\nu - \partial_\nu R_\mu$ , dividem-se em dois grupos. Para  $\mu = 1, 2, 3$ , tem-se que

$$\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_j}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i}{\partial q^j}\right)\dot{q}^j - \dot{p}_i = e\frac{\partial\phi}{\partial q^i} + \frac{e}{c}\frac{\partial A_i}{\partial t}. \quad (3.107)$$

Para  $\mu = 4, 5, 6$ , tem-se que

$$\dot{q}^i = \frac{p_i}{m}. \quad (3.108)$$

Combinados, os dois grupos resultam na equação de Lorentz.

O que é importante notar é que o momentum  $\mathbf{p}$  na formulação de Birkhoff é o *momentum mecânico*. Consequentemente, no Birkhoffiano não há sinal do campo magnético, embutido no potencial vetor. Na presente descrição, incluir o campo magnético significa alterar a *própria geometria do espaço de fase*, embutida na forma simplética  $\Omega$ . Esta é dada por

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{1}{2}\Omega_{\mu\nu}\mathbf{dx}^\mu \wedge \mathbf{dx}^\nu \\ &= \mathbf{dp}_i \wedge \mathbf{dq}^i + \frac{e}{2c}\left(\frac{\partial A_j}{\partial q^i} - \frac{\partial A_i}{\partial q^j}\right)\mathbf{dq}^i \wedge \mathbf{dq}^j. \end{aligned} \quad (3.109)$$

Como  $\epsilon_{ijk}B_k = \partial A_j/\partial q^i - \partial A_i/\partial q^j$ , é possível escrever  $\Omega$  sem mencionar o potencial vetor, o qual não é um objeto físico devido à liberdade de calibre:

$$\Omega = \mathbf{dp}_i \wedge \mathbf{dq}^i + \frac{e}{2c} \epsilon_{ijk} B_k \mathbf{dq}^i \wedge \mathbf{dq}^j. \quad (3.110)$$

Quando o campo magnético é nulo, a geometria simplética da formulação Birkhoffiana recai na geometria simplética canônica.

No próximo capítulo será analisado o tema principal desta dissertação, qual seja, o problema de derivar formulações de Poisson a partir das equações de movimento.

## Capítulo 4

# FORMULAÇÕES DE POISSON PARA SISTEMAS DINÂMICOS

No capítulo anterior, foi mostrada a importância das formulações de Poisson bem como sua relação com formulações alternativas da Mecânica. No entanto, dado um sistema dinâmico particular, encontrar uma estrutura de Poisson associada pode ser uma tarefa complicada. Neste capítulo, é exposto um procedimento natural para construir formulações Hamiltonianas generalizadas. O método aqui proposto sempre dá resultado (localmente), quando a dimensão do espaço de fase não excede três. De início, na seção 4.1, são tratadas as abordagens existentes para a derivação de descrições de Poisson. Em especial, é discutido o procedimento de redução em sistemas Hamiltonianos. Na seção seguinte, é exibida a estratégia proposta neste trabalho. As seções 4.3 e 4.4 dedicam-se à análise minuciosa do caso em que a dimensão do espaço de fase é três.

### *4.1 Caminhos que conduzem a Descrições de Poisson*

Existem poucos métodos dedutivos para encontrar estruturas de Poisson. Normalmente a tática utilizada é a intuição. Por outro lado, os métodos exis-

tentes requerem virtualmente a integração do sistema sob estudo. Em outras palavras, exigem o conhecimento de um grande número de integrais primeiras independentes. Na prática, raramente há tanta informação disponível, especialmente se a dimensionalidade for alta.

Darboux [41] pela primeira vez demonstrou que sistemas bidimensionais sempre podem ser descritos por um Lagrangiano e em conseqüência por um Hamiltoniano. Sua prova consistiu em reduzir o problema de encontrar o Lagrangiano a uma equação diferencial parcial de primeira ordem linear. Pelo teorema de Cauchy-Kovalevsky, tais equações admitem infinitas soluções (locais). Para referência futura, será exibido o argumento de Darboux.

Seja uma equação de segunda ordem (espaço de fase bidimensional) genérica

$$\ddot{q} = A(q, \dot{q}, t). \quad (4.1)$$

Se esta equação equivale a alguma equação de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (4.2)$$

então o Lagrangiano satisfaz

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2} A - \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \dot{q}} \dot{q} - \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}} = 0. \quad (4.3)$$

Denotando  $\partial^2 L / \partial \dot{q}^2$  por  $w(q, \dot{q}, t)$  e derivando a equação acima frente a  $\dot{q}$ , encontra-se o problema linear

$$\frac{\partial w}{\partial \dot{q}} A + \frac{\partial w}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial A}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (4.4)$$

que sempre admite solução local. Integrando  $w$  duas vezes obtém-se o Lagrangiano. Relembremos que no curso desta análise todas as funções são

consideradas infinitamente diferenciáveis, os campos vetoriais regulares, e assim por diante.

Existem formas alternativas de calcular explicitamente um Lagrangiano [42] e um Hamiltoniano [43] associados a modelos bidimensionais, desde que se conheça um invariante autônomo. Nos casos  $N$ -dimensionais, com  $(N - 1)$  invariantes autônomos, temos à disposição a formulação Hamiltoniana do tipo de Nambu, descrita em 3.3. Além disso, existem alguns resultados concernentes a descrições Birkhoffianas [18].

Embora não seja dedutivo, o método existente mais poderoso para encontrar formulações Hamiltonianas é o processo de *redução* [11][33]. De um modo simplificado, a redução consiste em isolar a dinâmica de determinados graus de liberdade em detrimento de outros. A dinâmica reduzida possui estrutura de Poisson oriunda da estrutura de Poisson do sistema completo. A redução, num certo sentido, é uma integração por partes do problema.

No que segue, serão examinadas com maior detalhe as asserções do último parágrafo. Existem duas etapas na redução, uma concernente ao tensor de Poisson e outra ao Hamiltoniano. Ao final, obtém-se um *espaço de fase reduzido*, de dimensão menor que o original. De modo notável, a dinâmica reduzida é Hamiltoniana. Isto possibilita encontrar formulações de Poisson para sistemas de dimensão menor a partir da redução de sistemas de dimensão maior. Ao final desta seção, o processo de redução será visualizado concretamente no exemplo do corpo rígido livre.

Considere-se um sistema Hamiltoniano canônico,  $2N$ -dimensional, com colchete de Poisson canônico definido via

$$J_C^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

A restrição de considerar um sistema canônico não é fundamental. Esta opção foi mera questão de conveniência. Vejamos em que condições é possível efetuar uma redução neste modelo Hamiltoniano.

Seja um conjunto de funções  $y^\alpha(\mathbf{x})$ ,  $\alpha = 1, \dots, M$ , com  $M < 2N$ , e duas funções  $F$  e  $G$  que tenham dependência nas variáveis  $\mathbf{x}$  através das variáveis  $\mathbf{y}$ :

$$F(\mathbf{x}) = \bar{F}(\mathbf{y}(\mathbf{x})), \quad G(\mathbf{x}) = \bar{G}(\mathbf{y}(\mathbf{x})). \quad (4.6)$$

Para esta classe de funções, a regra da cadeia leva a expressão

$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial y^\mu} \left( \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\rho} J_C^{\rho\sigma} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\sigma} \right) \frac{\partial G}{\partial y^\nu}, \quad (4.7)$$

sendo que eliminamos a barra em  $F$  e  $G$ . A quantidade

$$J^{\mu\nu} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\rho} J_C^{\rho\sigma} \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\sigma} \quad (4.8)$$

geralmente é função de  $\mathbf{x}$ . Entretanto, é possível que somente dependa das variáveis  $\mathbf{y}$ . Quando esta *condição de clausura* é satisfeita,  $J^{\mu\nu}(\mathbf{y})$  pode ser encarado como um tensor de Poisson nas variáveis  $\mathbf{y}$ . De fato, a identidade de Jacobi e a anti-simetria do tensor de Poisson nas variáveis  $\mathbf{y}$  permanecem válidas. Escrever o tensor de Poisson em termos de um conjunto reduzido de variáveis constitui a primeira etapa do processo de redução. Observe-se que as relações  $y^\alpha = y^\alpha(\mathbf{x})$  *não definem* uma mudança de coordenadas. Realmente, em geral é impossível inverter estas relações, já que existe um número maior de coordenadas  $\mathbf{x}$  do que variáveis  $\mathbf{y}$ .

A segunda parte da redução requer a validade da equação

$$H(\mathbf{x}) = \bar{H}(\mathbf{y}) \quad (4.9)$$

para alguma função  $\bar{H}$ . Este requerimento não é trivial, e supõe a existência de graus de liberdade ignoráveis. Isto, por sua vez, equivale a existência de alguma simetria no modelo. Uma vez satisfeitos os critérios de clausura do tensor de Poisson e de simetria do Hamiltoniano, encerra-se a redução. Ao final, obtém-se equações de movimento *Hamiltonianas* envolvendo apenas coordenadas  $(y^1, \dots, y^M)$ , do espaço de fase reduzido,

$$\dot{y}^\mu = \sum_{\nu=1}^{M < 2N} J^{\mu\nu}(\mathbf{y}) \partial_\nu \bar{H}(\mathbf{y}). \quad (4.10)$$

A conexão entre simetria e redução em sistemas Hamiltonianos pode ser analisada com grande profundidade. Nas referências [5][11][33] encontram-se maiores detalhes. O propósito principal desta seção é verificar como a redução possibilita a derivação de estruturas de Poisson. Assim, meramente serão ilustradas as idéias expostas acima com o exemplo do corpo rígido livre.

Inicialmente, será exibida a descrição canônica do corpo rígido livre, e então será feita a redução. O corpo rígido livre não está sujeito a forças externas. Assim, é conveniente tomar o centro de massa como a origem do sistema de referência. A posição do corpo é especificada, neste referencial, apenas por três ângulos. Os ângulos de Euler  $\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3)$  podem ser escolhidos como coordenadas do espaço de configuração [35]. Para encontrar a descrição canônica, é preciso efetuar a transformação de Legendre do Lagrangiano  $L(\chi, \dot{\chi})$ . Orientando os eixos do sistema de referência de modo a deixá-los paralelos aos eixos principais do corpo, o Lagrangiano toma o aspecto

$$L(\chi, \dot{\chi}) = \frac{1}{2}(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2), \quad (4.11)$$

sendo que  $(I_1, I_2, I_3)$  são os momentos de inércia e as velocidades angulares

em torno dos eixos principais  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  relacionam-se com os ângulos de Euler por [35]

$$\begin{aligned}\omega_1(\chi, \dot{\chi}) &= \dot{\chi}_1 \cos \chi_3 + \dot{\chi}_2 \sin \chi_1 \sin \chi_3, \\ \omega_2(\chi, \dot{\chi}) &= -\dot{\chi}_1 \sin \chi_3 + \dot{\chi}_2 \sin \chi_1 \cos \chi_3, \\ \omega_3(\chi, \dot{\chi}) &= \dot{\chi}_3 + \dot{\chi}_2 \cos \chi_1.\end{aligned}\tag{4.12}$$

Por inspeção do Lagrangiano (4.11) e das expressões das velocidades angulares em termos de  $(\chi, \dot{\chi})$ , conclui-se que o Lagrangiano nas novas coordenadas é uma forma quadrática homogênea das velocidades  $\dot{\chi}$ . Isto é,

$$L(\chi, \dot{\chi}) = \frac{1}{2} g_{ij}(\chi) \dot{\chi}_i \dot{\chi}_j,\tag{4.13}$$

para uma certa matriz simétrica  $g_{ij}$ . A forma exata desta matriz não é importante para o que segue. O que importa é que no caso a transformação de Legendre é simplesmente

$$\begin{aligned}H(\mathbf{p}, \chi) &= p_i \dot{\chi}_i - L \\ &= \frac{1}{2} g_{ij}(\chi) \dot{\chi}_i \dot{\chi}_j = L,\end{aligned}\tag{4.14}$$

sendo que as velocidades estão sendo entendidas como funções dos momenta através de  $p_i = \partial L / \partial \dot{\chi}_i = g_{ij} \dot{\chi}_j$ . Ou seja, o Hamiltoniano é o Lagrangiano expresso em termos das coordenadas canônicas.

Porém, o Lagrangiano como função das velocidades angulares  $\omega$  possui uma expressão bastante simples. De fato, usando (4.11), vem que

$$H = L = \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2),\tag{4.15}$$

ou ainda, usando os momenta de rotação em torno dos eixos principais  $L_i = I_i \omega_i$  (sem soma),

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3} \right),\tag{4.16}$$

dependente apenas de  $(L_1, L_2, L_3)$ . As variáveis  $(L_1, L_2, L_3)$ , portanto, são *excelentes candidatas a coordenadas de um espaço de fase reduzido!* Resta apenas verificar se os colchetes de Poisson *canônicos*  $\{L_i, L_j\}$  podem ser expressos em termos somente das velocidades angulares. A verificação desta condição de clausura encerra o processo de redução. Cálculos longos e pouco elucidativos de fato confirmam o requerimento de clausura. Meramente exporemos o resultado final:

$$\begin{aligned}\{L_i, L_j\} &= \frac{\partial L_i}{\partial \chi_k} \frac{\partial L_j}{\partial p_k} - \frac{\partial L_j}{\partial \chi_k} \frac{\partial L_i}{\partial p_k} \\ &= -\epsilon_{ijk} L_k,\end{aligned}\tag{4.17}$$

que equivale ao tensor de Poisson exibido na seção 3.1.

Em conclusão, a dinâmica Hamiltoniana no espaço de fase reduzido é dada por  $\dot{L}_i = \{L_i, H(\mathbf{L})\}$ , sendo  $H(\mathbf{L})$  definido em (4.16) e o colchete de Poisson em (4.17). As equações de movimento coincidem com as equações de Euler.

Diversas descrições Hamiltonianas não-canônicas foram derivadas da redução de descrições canônicas. Boa parte dos tensores de Poisson assim derivados dependem linearmente das coordenadas, como no caso do corpo rígido livre:

$$J^{\mu\nu} = c_\rho^{\mu\nu} x^\rho,\tag{4.18}$$

sendo que  $c_\rho^{\mu\nu}$  são números. Devido a anti-simetria e a identidade de Jacobi, estas constantes satisfazem

$$c_\rho^{\mu\nu} = -c_\rho^{\nu\mu},\tag{4.19}$$

$$c_\alpha^{\mu\nu} c_\nu^{\rho\sigma} + c_\alpha^{\rho\nu} c_\nu^{\sigma\mu} + c_\alpha^{\sigma\nu} c_\nu^{\mu\rho} = 0.\tag{4.20}$$

Com isto, as constantes  $c_{\rho}^{\mu\nu}$  qualificam-se como *constantes de estrutura de uma álgebra de Lie*, e o colchete de Poisson associado chama-se *colchete de Lie-Poisson* [5]. Às vezes, por transformação de coordenadas é possível transformar um colchete de Poisson que não é de Lie-Poisson em um colchete de Lie-Poisson. Entretanto, no momento não existem critérios universais a este respeito.

Vale lembrar que a escolha das variáveis que permitem a redução não é uma tarefa óbvia. Frequentemente algum tipo de *ansatz* é tomado como ponto de partida [33]. Por outro lado, a principal vantagem do método exposto na próxima seção é seu caráter *dedutivo*. Conforme será visto, seguindo a estratégia a ser proposta, será deduzida a estrutura de Poisson mais geral possível para o corpo rígido livre. A estrutura Hamiltoniana assim obtida generaliza em muito a encontrada por redução. Em particular, o colchete que será construído não é de Lie-Poisson.

## 4.2 Teoria Básica

A estratégia que será adotada para deduzir estruturas Hamiltonianas será a mais direta e conceitualmente simples possível. Não será utilizado um número proibitivo de constantes de movimento, nem transformações de coordenadas que trivializam a dinâmica (mas que são de obtenção tão difícil quanto a integração do problema em si).

Serão tratados sistemas dinâmicos genéricos do tipo

$$\dot{x}^{\mu} = v^{\mu}(\mathbf{x}, t); \quad \mu = 1, \dots, N, \quad (4.21)$$

e o problema de encontrar sua formulação de Poisson. Isto equivale a obter

um Hamiltoniano e um tensor de Poisson apropriados.

O primeiro ingrediente a comparecer numa descrição Hamiltoniana de (4.21) é um *Hamiltoniano*  $H(\mathbf{x}, t)$ , isto é, uma função que satisfaz

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \quad (4.22)$$

ao longo das trajetórias. Em outras palavras,

$$v^\mu \partial_\mu H = 0. \quad (4.23)$$

Geometricamente, o Hamiltoniano é definido de forma que, para cada valor instantâneo  $t_0$  do tempo, as trajetórias são tangentes à superfície  $H(\mathbf{x}, t_0)$  constante (definida para  $t$  congelado). Em casos específicos,  $H$  pode ser um invariante autônomo.

Como a equação satisfeita por  $H$  é linear, está garantida a existência de solução local. Evidentemente para nós somente soluções válidas ao menos numa região têm utilidade prática.

Suponha que há à mão um Hamiltoniano, obtido resolvendo (4.23). O próximo ingrediente de uma descrição de Poisson é um *tensor de Poisson*  $\mathbf{J}$ . Estes tensores do tipo  $(2, 0)$  caracterizam-se pela anti-simetria e por implementarem um colchete de Poisson no espaço de fase. Inicialmente, a propriedade de anti-simetria será focalizada.

Seja, pois, uma matriz anti-simétrica  $J^{\mu\nu}$  tal que

$$\dot{x}^\mu = v^\mu = J^{\mu\nu} \partial_\nu H, \quad (4.24)$$

para  $v^\mu$  e  $H$  dados. O conjunto de equações acima será encarado como um sistema linear nas componentes de  $J^{\mu\nu}$ . À primeira vista, este sistema de  $N$  equações permite expressar  $N$  componentes da matriz  $J^{\mu\nu}$  em termos

das demais, de  $v^\mu$  e de  $\partial_\mu H$ . Na verdade, é possível isolar apenas  $(N - 1)$  componentes. A informação de uma das equações já está contida na relação  $v^\mu \partial_\mu H = 0$ . Esta é a mensagem do lema que segue (numerando as coordenadas de modo que  $\partial_N H \neq 0$ ):

**Lema:** Se para  $J^{\mu\nu}$  anti-simétrico e  $H(\mathbf{x}, t)$  satisfazendo (4.23),

$$v^s = J^{s\nu} \partial_\nu H, \quad s = 1, \dots, (N - 1), \quad (4.25)$$

então

$$v^N = J^{N\nu} \partial_\nu H. \quad (4.26)$$

Prova: em vista de (4.25), a condição (4.23) pode ser expandida como

$$\sum_{\mu=1}^{N-1} \partial_\mu H J^{\mu\nu} \partial_\nu H + v^N \partial_N H = 0. \quad (4.27)$$

Somando e diminuindo  $J^{N\nu} \partial_\nu H$ , vem

$$\{H, H\}^* + \partial_N H (v^N - J^{N\nu} \partial_\nu H) = 0, \quad (4.28)$$

sendo que

$$\{H, H\}^* = \partial_\mu H J^{\mu\nu} \partial_\nu H. \quad (4.29)$$

O lema segue trivialmente da anti-simetria de  $J^{\mu\nu}$  e do fato de termos escolhido  $\partial_N H \neq 0$ .

**Corolário:** Se (4.25) for válida, então

$$J^{\mu N} = -J^{N\mu} = (v^\mu - \sum_{\nu=1}^{N-1} J^{\mu\nu} \partial_\nu H) / \partial_N H, \quad (4.30)$$

isto é,  $(N - 1)$  dentre as componentes independentes da matriz  $J^{\mu\nu}$  podem ser expressas em termos das componentes restantes, de  $v^\mu$  e de  $\partial_\nu H$ . A prova é obtida resolvendo (4.25) como um sistema linear para  $J^{N\nu}$ .

Observe-se que, em (4.29), fez-se questão de colocar um asterisco no colchete  $\{H, H\}$ . Com isto, assinalou-se que  $\{H, H\}^*$  *não é* um colchete de Poisson, pois ainda não foi imposta a identidade de Jacobi. Isto é, neste estágio  $J^{\mu\nu}$  é apenas uma matriz anti-simétrica que permite escrever o sistema dinâmico (4.21) na forma pré-Hamiltoniana (4.24). Agora, será exigido que  $J^{\mu\nu}$  sejam as componentes de um tensor de Poisson. Neste caso, vale a identidade de Jacobi

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0, \quad (4.31)$$

sendo  $A, B$  e  $C$  funções arbitrárias e

$$\{A, B\} = \partial_\mu A J^{\mu\nu} \partial_\nu B. \quad (4.32)$$

A identidade de Jacobi é verdadeira se e somente se

$$J^{\nu[\mu} \partial_\nu J^{\rho\sigma]} = 0, \quad (4.33)$$

ou seja, se e somente se

$$J^{\nu\mu} \partial_\nu J^{\rho\sigma} + J^{\nu\rho} \partial_\nu J^{\sigma\mu} + J^{\nu\sigma} \partial_\nu J^{\mu\rho} = 0. \quad (4.34)$$

Estas últimas relações também serão referidas como “identidades de Jacobi”. Ao todo, estas são  $N!/(3!(N-3)!)$  equações a serem impostas sobre as  $(N-1)(N-2)/2$  funções  $J^{rs}$  ( $r < s = 1, \dots, (N-1)$ ), ainda arbitrárias, na matriz  $J^{\mu\nu}$ . Para  $N < 3$  as identidades de Jacobi (4.34) são trivialmente satisfeitas e a formulação de Poisson completa. Para  $N > 3$  as identidades de Jacobi formam um sistema sobredeterminado e, em geral, quasilinear, cuja análise é delicada. Para o caso especial em que  $N = 3$  o problema se reduz a

uma equação a uma incógnita. É notável que esta equação seja uma equação *linear*, conforme se constatará.

Na próxima seção, será analisada com detalhe a metodologia proposta, no caso tridimensional.

### 4.3 O Caso Tridimensional

Sistemas tridimensionais são um tópico importante da Física-Matemática. A menos que o tempo compareça explicitamente nas equações de movimento, três é a dimensão mínima que suporta regimes caóticos. Há que se notar, também, que modelos tridimensionais frequentemente são usados em aplicações. O corpo rígido livre, a dinâmica de raios na Ótica de um meio axisimétrico [9], a interação ressonante de três ondas segundo várias condições [44]-[46], o sistema de Rössler [47], o sistema de Lorenz [48], sistemas de Lotka-Volterra tridimensionais [49], a dinâmica em lasers descritos pelas equações de Lamb [50] e Maxwell-Bloch [51], o dínamo de Rikitake [52] e vários outros sistemas físicos, químicos e biológicos constituem modelos tridimensionais. É de interesse obter, na medida do possível, estruturas Hamiltonianas para sistemas tridimensionais.

Nesta seção será desenvolvida minuciosamente a teoria básica da seção 4.2, no caso tridimensional. Com isto, serão ilustradas as idéias propostas e será construída uma técnica capaz de tratar eficientemente modelos relevantes como os mencionados no parágrafo anterior.

Seja, então, um sistema dinâmico a três dimensões espaciais

$$\dot{x}^\mu = v^\mu(\mathbf{x}, t); \quad \mu = 1, 2, 3, \quad (4.35)$$

possivelmente não autônomo, que admite um Hamiltoniano  $H(\mathbf{x}, t)$ . Como  $H$  não é um número, é possível definir, sem perda da generalidade,  $\partial_3 H \neq 0$ . Esta hipótese não tem influência nos resultados derivados a seguir. As equações (4.25) tomam o aspecto

$$v^1 = J^{12}\partial_2 H + J^{13}\partial_3 H, \quad (4.36)$$

$$v^2 = -J^{12}\partial_1 H + J^{23}\partial_3 H. \quad (4.37)$$

Resolvendo estas equações para  $J^{13}$  e  $J^{23}$  e introduzindo o símbolo  $J$ , obtemos

$$\begin{aligned} J^{12} &= J, \\ J^{13} &= (v^1 - J\partial_2 H)/\partial_3 H, \\ J^{23} &= (v^2 + J\partial_1 H)/\partial_3 H. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Quando  $\partial_3 H \equiv 0$ , as equações (4.38) são aplicáveis após uma permutação cíclica dos índices ( $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ). Esta permutação deve ser estendida às fórmulas subsequentes.

De acordo com (4.38), a única função ainda arbitrária na descrição de Poisson é  $J$ . A três dimensões, existe apenas uma identidade de Jacobi,

$$J^{\mu 1}\partial_\mu J^{23} + J^{\mu 2}\partial_\mu J^{31} + J^{\mu 3}\partial_\mu J^{12} = 0. \quad (4.39)$$

Utilizando (4.38), a identidade de Jacobi torna-se uma equação a ser satisfeita apenas por  $J$ . Fazendo isto e multiplicando o resultado por  $(\partial_3 H)^2$ , verifica-se (após um cálculo simples) que os coeficientes dos fatores  $\partial_\mu \partial_\nu H$  e  $J\partial_\mu J$  cancelam-se. A equação resultante é

$$\begin{aligned} &v^2\partial_3 v^1 - v^1\partial_3 v^2 + v^1\partial_1 J + \\ &v^2\partial_2 J - (v^1\partial_1 H + v^2\partial_2 H)\partial_3 J + \\ &-(\partial_1 v^1 + \partial_2 v^2 - \partial_3 v^2\partial_2 H - \partial_3 v^1\partial_1 H)J = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Usando (4.23), pode-se expressar a equação obtida na forma compacta

$$v^\mu \partial_\mu J = AJ + B, \quad (4.41)$$

sendo

$$A = \partial_\mu v^\mu - \frac{\partial_3 v^\mu \partial_\mu H}{\partial_3 H} \quad (4.42)$$

e

$$B = \frac{v^1 \partial_3 v^2 - v^2 \partial_3 v^1}{\partial_3 H}. \quad (4.43)$$

A equação (4.41) é a equação básica de nossa abordagem para obtenção de formulações Hamiltonianas tridimensionais. Conforme antecipamos, trata-se de uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem. Portanto, está garantida a existência de infinitas soluções locais, advindas do sistema característico

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3} = \frac{dJ}{AJ + B}. \quad (4.44)$$

A solução geral de (4.41) contém funções arbitrárias das constantes de movimento admitidas por (4.44). Daí a existência de uma infinidade de soluções.

Pela primeira vez, demonstrou-se a existência local de descrições Hamiltonianas generalizadas para sistemas a três dimensões uma vez integráveis. É notável a analogia com a prova de Darboux [41] da existência de formulações Lagrangianas dos sistemas bidimensionais. Aí também o problema reduziu-se a uma equação parcial linear.

A seção será finalizada com algumas observações concernentes à aplicação concreta do método. Em vários casos de interesse não se conhecem ou não existem invariantes autônomos para os problemas tratados [53]. Este fato deve-se ao comportamento genericamente irregular dos sistemas analisados.

Em consequência, constantes de movimento não são disponíveis como Hamiltonianos destes modelos. Entretanto, para algumas faixas de parâmetros das equações de evolução, invariantes explicitamente dependentes do tempo são conhecidos. Naturalmente, é cabível perguntar de que maneira é possível utilizar estas constantes de movimento na derivação de estruturas de Poisson. A resposta é simples: realizando uma transformação de coordenadas espaciais do tipo  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \phi(\mathbf{x}, t)$ , não autônoma, que elimine o tempo dos invariantes. Não é essencial transformar a coordenada temporal. Eliminando o tempo de invariantes não autônomos via transformações desta espécie, Goedert *et al.* [54], derivaram uma série de formalismos de Poisson para sistemas tridimensionais. Foram utilizadas sistematicamente mudanças de variáveis na forma

$$x^i \mapsto y^i = x^i \exp(s_i t), \quad (4.45)$$

sendo que não há soma sobre o índice repetido e  $s_i$  é um coeficiente real. Ou seja, as mudanças de variáveis consideradas foram reescalamentos dependentes do tempo. Este tipo de reescalamento se revela útil mesmo quando não há nenhum invariante (autônomo ou não), como será visto no capítulo 5.

As descrições de Poisson deduzidas empregando trocas de variáveis dependentes do tempo claramente se referem aos sistemas *transformados*, expressos nas variáveis  $(\mathbf{y}, t)$ . Como estas mudanças de coordenadas envolvem o tempo como parâmetro, não é possível transportar a estrutura de Poisson para as variáveis  $(\mathbf{x}, t)$ . O mapeamento não é canônico (ver seção 3.2). No entanto, não se pode desmerecer as formulações de Poisson nas variáveis transformadas. Eventualmente aspectos interessantes do modelo podem ser esclarecidos pelas formulações Hamiltonianas nas novas coordenadas.

#### 4.4 Invariância Conforme da Identidade de Jacobi a Três Dimensões

Uma característica notável da identidade de Jacobi a três dimensões é sua invariância de escala ou *conforme*. Isto é, se  $J^{\mu\nu}$  é um tensor de Poisson a três dimensões, então  $\bar{J}^{\mu\nu} = g(\mathbf{x})J^{\mu\nu}$  também o é, qualquer que seja a função  $g(\mathbf{x})$ . Nesta seção será demonstrado que o formalismo deste capítulo preserva a invariância conforme, num sentido definido precisamente. Como corolário, diversos aspectos formais da metodologia proposta serão esclarecidos.

Antes de mais nada, é preciso verificar que a identidade de Jacobi tridimensional de fato admite invariância de escala. Seja  $J^{\mu\nu}$  a representação de um tensor de Poisson, e  $\bar{J}^{\mu\nu} = g(\mathbf{x})J^{\mu\nu}$ . Evidentemente  $\bar{J}^{\mu\nu}$  é anti-simétrico. Para que  $\bar{J}^{\mu\nu}$  seja a matriz de um tensor de Poisson, é necessário que

$$\bar{J}^{\mu[\nu} \partial_{\mu} \bar{J}^{\rho\sigma]} = 0. \quad (4.46)$$

Expressando esta equação em termos de  $J^{\mu\nu}$  e  $g(\mathbf{x})$  e considerando a identidade de Jacobi para o tensor original, vem que

$$\partial_{\mu} g J^{\mu[\nu} J^{\rho\sigma]} = 0. \quad (4.47)$$

Conseqüentemente,  $\bar{J}^{\mu\nu}$  será um tensor de Poisson para toda função de escala  $g(\mathbf{x})$  se e somente se

$$J^{\mu[\nu} J^{\rho\sigma]} = 0, \quad (4.48)$$

para todos os índices possíveis  $(\mu\nu\rho\sigma)$ .

Verifica-se facilmente que se houver qualquer repetição dos quatro índices  $(\mu\nu\rho\sigma)$  obtém-se uma identidade. A três dimensões, é inevitável a repetição

dos índices e a conseqüente invariância conforme da identidade de Jacobi. A dimensão maior, obtém-se restrições não-triviais sobre o tensor de Poisson original. Por exemplo, se  $\dim M = 4$ , é preciso que

$$J^{12} J^{34} + J^{13} J^{42} + J^{14} J^{23} = 0. \quad (4.49)$$

Deve ser salientado que o argumento refere-se a tensores  $J^{\mu\nu}$  e fatores de escala  $g(\mathbf{x})$  arbitrários. Podem haver tensores particulares que satisfazem  $J^{\mu[\nu} J^{\rho\sigma]} = 0$ , como por exemplo os tensores de Nambu. Além disso, certas funções  $g$  sempre são permitidas. Para ver isto, reescreve-se (4.47) segundo

$$\{g, x^{[\nu} J^{\rho\sigma]}\} = 0. \quad (4.50)$$

Acima,  $\{, \}$  é o colchete de Poisson correspondente a  $J^{\mu\nu}$ . É manifesto na equação acima que qualquer  $g$  dependendo apenas das funções de Casimir de  $J^{\mu\nu}$  é admissível. Isto é,  $\bar{J}^{\mu\nu} = g(C)J^{\mu\nu}$  é um tensor de Poisson sempre, qualquer que seja  $\dim M$ , desde que  $\mathbf{J}$  caracterize  $M$  como uma variedade de Poisson.

Em vista dos fatos constatados, é necessário provar a invariância conforme da teoria desenvolvida neste capítulo. Isto capacitará uma compreensão mais aprofundada do grau de arbitrariedade no problema de encontrar formulações Hamiltonianas tridimensionais.

A três dimensões, demonstrou-se que, se  $J^{\mu\nu}$  é um tensor de Poisson então  $\bar{J}^{\mu\nu} = g(\mathbf{x})J^{\mu\nu}$  também o é, sendo  $g(\mathbf{x})$  qualquer. Entretanto, suponha que  $J^{\mu\nu}$  e  $H$  descrevam um dado sistema dinâmico  $(\mathbf{v}, M)$ , ou seja, que

$$v^\mu = J^{\mu\nu} \partial_\nu H. \quad (4.51)$$

Um tensor de Poisson reescalonado qualquer satisfaz a identidade de Jacobi a três dimensões. Porém, para que  $\bar{J}^{\mu\nu}$  seja “adaptado” às equações acima,

é necessário que exista alguma função  $\bar{H}$  tal que

$$\bar{J}^{\mu\nu} \partial_\nu \bar{H} = J^{\mu\nu} \partial_\nu H. \quad (4.52)$$

Esta igualdade impõe severas restrições sobre a função de escala  $g(\mathbf{x})$ .

As últimas observações devem-se ao fato da equação fundamental (4.41) ter sido construída especialmente para um sistema dinâmico *dado*. No que segue, será demonstrado que se  $J = J^{12}$  satisfaz (4.41) com os coeficientes  $A$  e  $B$  calculados usando  $H$ , então  $\bar{J} = \bar{J}^{12} = gJ$  também é solução com  $A$  e  $B$  calculados em termos de  $\bar{H}$ . Entretanto, a forma de  $g$  deverá ser corretamente restringida. Com isto, será provada a invariância conforme da teoria, no sentido restrito.

É preciso estabelecer com rigor quais condições recaem sobre o fator de escala. Observe-se a equação (4.52). Com toda generalidade,  $\bar{H}$  é uma função dos dois invariantes autônomos presentes a três dimensões (estão sendo considerados sistemas autônomos; a extensão para incluir dependência temporal é direta). Os invariantes podem ser tomados como o Hamiltoniano original  $H$  e a função de Casimir  $C$  de  $J^{\mu\nu}$ . Ou seja,  $\bar{H} = F(H, C)$  para alguma função  $F$ . Substituindo esta expressão e  $\bar{J}^{\mu\nu} = gJ^{\mu\nu}$  em (4.52), encontra-se

$$gJ^{\mu\nu} \left( \frac{\partial F}{\partial H} \partial_\nu H + \frac{\partial F}{\partial C} \partial_\nu C \right) = J^{\mu\nu} \partial_\nu H. \quad (4.53)$$

O segundo termo no lado esquerdo é nulo, pois  $C$  é função de Casimir e satisfaz  $J^{\mu\nu} \partial_\nu C = 0$ . Rearranjando termos, conclui-se que

$$g = 1/(\partial F/\partial H) = g(H, C), \quad (4.54)$$

dependendo apenas das constantes de movimento. Além disso, não é possível que o fator de escala seja função apenas de  $C$  (isto é,  $\partial F/\partial H \neq 0$ ).

Em outros termos, a teoria deste capítulo preserva a invariância conforme sempre que  $\bar{J} = J/(\partial F/\partial H)$  satisfaça à equação (4.41) a coeficientes calculados usando  $\bar{H} = F(H, C)$  e  $J$  calculado a partir de  $H$ . É portanto necessário que

$$v^\mu \partial_\mu (J/(\partial F/\partial H)) = \bar{A}J/(\partial F/\partial H) + \bar{B} \quad (4.55)$$

sendo  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  dados por

$$\bar{A} = \partial_\mu v^\mu - \partial_3 v^\mu \partial_\mu F/\partial_3 F, \quad (4.56)$$

$$\bar{B} = (v^1 \partial_3 v^2 - v^2 \partial_3 v^1)/\partial_3 F. \quad (4.57)$$

Supondo a veracidade de (4.55), o resultado é uma identidade. De fato, substituindo  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  em (4.55) e usando explicitamente

$$\partial_\mu F = (\partial F/\partial H)\partial_\mu H + (\partial F/\partial C)\partial_\mu C, \quad (4.58)$$

uma série de termos é eliminada usando (4.41). Realmente, lembrando que vale  $v^\mu \partial_\mu (\partial F/\partial H) = 0$  ( $F$  é uma constante de movimento) e multiplicando por  $\partial_3 F$  pode-se verificar que a invariância conforme equivale a

$$\left( \frac{\partial F/\partial C}{\partial F/\partial H} \right) (\partial_3 C v^\mu \partial_\mu J - (\partial_\mu v^\mu \partial_3 C - \partial_3 v^\mu \partial_\mu C)J) = 0. \quad (4.59)$$

Quando  $\bar{H} = F(H)$ , o resultado almejado é imediato. Entretanto, esta restrição não é necessária, pois o termo no segundo parêntese da equação acima é identicamente nulo. Para demonstrar isto, usam-se os fatos de que  $C$  é função de Casimir e de que o fluxo Hamiltoniano preserva o tensor de Poisson. O primeiro passo em direção à prova é eliminar  $C$  de (4.59) utilizando

$$J\partial_2 C = -J^{13}\partial_3 C, \quad (4.60)$$

$$J\partial_1 C = J^{23}\partial_3 C, \quad (4.61)$$

conseqüência de  $C$  ser função de Casimir. Com isto, verifica-se que (4.59) equivale a

$$\partial_3 C \left( v^\mu \partial_\mu J - (\partial_1 v^1 + \partial_2 v^2) J + \partial_3 v^1 J^{23} - J^{13} \partial_3 v^2 \right) = 0. \quad (4.62)$$

Claramente é necessário que o termo entre parêntese seja nulo, o que equivale a uma relação envolvendo apenas o campo vetorial e o tensor de Poisson  $\mathbf{J}$ . Mas  $\mathbf{J}$  é preservado pelo fluxo, isto é, a derivada de Lie na direção do campo Hamiltoniano é nula. Tomando  $(\mu\nu) = (12)$  na relação (3.17), que expressa a preservação de  $\mathbf{J}$ , obtém-se exatamente a anulação do termo entre parêntese em (4.62).

Demonstrou-se que na equação fundamental (4.41) está presente a invariância conforme. Tal fato, como foi visto, não é óbvio matematicamente, embora seja esperado. De fato, seria uma surpresa se a identidade de Jacobi não estivesse contida em (4.41), pois esta equação nada mais é do que a identidade de Jacobi reescrita, a qual é invariante por mudança de escala.

Uma mensagem que deve ter ficado clara ao longo deste capítulo é a grande maleabilidade das formulações Hamiltonianas tridimensionais. Isto é, dadas as equações de evolução, existe uma grande arbitrariedade na escolha do par  $(H, \mathbf{J})$  que especifica a estrutura de Poisson. Mesmo fixando o Hamiltoniano, não se fixa o tensor de Poisson, devido a presença de funções arbitrárias na solução de (4.41). Além disso, dada uma estrutura de Poisson definida por um par  $(H, \mathbf{J})$ , existe uma classe infinita de estruturas de Poisson equivalentes. Estas são descritas por pares  $(\bar{H}, \bar{\mathbf{J}})$ , sendo  $\bar{H} = F(H, C)$  e  $\bar{\mathbf{J}}$  obtido de  $\mathbf{J}$  pela transformação conforme  $\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{J}/(\partial F/\partial H)$ .

Há algum tempo atrás, Wigner [55] propôs a seguinte questão: “As equações de movimento determinam as relações de comutação?”. Ao menos

no caso dos sistemas dinâmicos tridimensionais, a resposta é um sonoro *não*. Existe, pois, o problema de qual representação Hamiltoniana de um modelo clássico tridimensional tomar como ponto de partida para uma eventual transição quântica. Nos casos simpléticos, ao contrário, genericamente as relações de comutação são únicas [56]. Isto é, a menos que a dinâmica seja trivial, a estrutura simplética (que é mais restritiva do que a de Poisson) é única.

Como resultado da invariância conforme, tem-se de imediato a solução geral de (4.41) usando como Hamiltoniano  $F(H, C)$  uma vez conhecida a solução  $J$ . De fato,  $J/(\partial F/\partial H)$  é solução, e, tanto quanto  $J$ , envolve uma função arbitrária das superfícies características. A única exceção ocorre quando é usada uma função de Casimir  $C$  como fonte em (4.41). Neste caso é preciso resolver novamente a equação, pois que não há mudança de escala que interconecte as duas descrições ( $\partial F/\partial H = 0$ ).

Recentemente, Gümral e Nutku [57] utilizaram a invariância conforme da identidade de Jacobi tridimensional para construir formulações de Poisson. A abordagem utilizada foi definir uma das componentes do vetor  $(J^{23}, J^{31}, J^{12})$  como sendo unitária e utilizar a relação algébrica (facilmente demonstrável)

$$J^{23}v^1 + J^{31}v^2 + J^{12}v^3 = 0 \quad (4.63)$$

para reduzir o número de componentes livres para um. Graças à invariância conforme, definir uma das componentes como sendo unitária não prejudica a generalidade. Tomando, por exemplo,  $J^{31} = 1$ , definindo

$$r = J^{23} \quad (4.64)$$

e usando (4.63), obtém-se que

$$(J^{23}, J^{31}, J^{12}) = (r, 1, -\frac{(v^2 + rv^1)}{v^3}). \quad (4.65)$$

Assim, a única variável livre é a razão  $r$ . Substituindo a última equação na identidade de Jacobi, Gümral e Nutku obtiveram (ver fórmula (70) do artigo citado) uma equação quasilinear do tipo

$$v^\mu(\mathbf{x})\partial_\mu r = \alpha(\mathbf{x})r^2 + \beta(\mathbf{x})r + \gamma(\mathbf{x}). \quad (4.66)$$

Trata-se de uma equação quasilinear para a variável  $r$ , que determina, mediante a liberdade de escala, o tensor de Poisson.

Gümral e Nutku também reduziram à uma equação parcial de primeira ordem o problema de encontrar formulações Hamiltonianas tridimensionais. Entretanto, deve-se salientar que (4.66), ao contrário da equação fundamental (4.41), é *não-linear*. Assim sendo, a existência de solução local não é garantida. Mesmo se o sistema dinâmico sob estudo for completamente integrável, a resolução de (4.66) pode ser uma tarefa árdua. Nos casos completamente integráveis, por outro lado, a equação (4.41) pode ser resolvida por quadratura devido a seu caráter linear.

No próximo capítulo, serão construídas formulações de Poisson para diversos sistemas dinâmicos tridimensionais de interesse.

## Capítulo 5

### FORMULAÇÕES DE POISSON TRIDIMENSIONAIS: EXEMPLOS

Ao longo deste capítulo é aplicada sistematicamente a equação (4.41) para a obtenção de formulações Hamiltonianas de sistemas tridimensionais. Os modelos tratados são os seguintes: o patim no gelo, uma carga irradiando enquanto executa um movimento unidimensional sob a ação de um campo elétrico constante, o corpo rígido livre, sistemas reescalados de Lorenz, de três ondas reduzido e de Rabinovich e, finalmente, o sistema de Lotka-Volterra tridimensional. Com exceção do sistema de Lotka-Volterra, que reserva certas peculiaridades matemáticas, as estruturas de Poisson deduzidas são bi-Hamiltonianas. Ou seja, é resolvida a equação básica (4.41) utilizando como Hamiltonianos funções distintas  $H$  e  $\bar{H}$ . Estas duas formulações não são equivalentes sob transformações conformes.

Como foi observado repetidas vezes ao longo desta dissertação, o ponto de partida para encontrar uma formulação de Poisson é um Hamiltoniano  $H$ . Nos casos autônomos,  $H$  pode ser qualquer função das constantes de movimento do sistema. Algumas vezes, entretanto, estas constantes de movimento tem validade meramente local. Nestes casos, de nada auxiliam na procura

de uma estrutura Hamiltoniana, sendo necessário algo mais. Neste capítulo, são obtidas formulações de Poisson para alguns modelos autônomos sem invariante autônomo global, recorrendo a reescalamentos dependentes do tempo.

### 5.1 *Patim no Gelo*

Este é um problema não-holônomo e portanto normalmente entendido como não Hamiltoniano [35]. Será suposto que sobre o patim não age nenhuma força externa. De início, vejamos as equações de movimento. O espaço de configuração é tridimensional, sendo constituído de dois graus de liberdade translacionais e um rotacional. Podem ser tomadas como coordenadas generalizadas  $\mathbf{q} = (x, y, \theta)$ , com  $(x, y)$  a posição do centro de massa e  $\theta$  o ângulo de orientação com respeito ao eixo  $x$ . Há também o vínculo não-holônomo

$$\phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0, \quad (5.1)$$

o qual é linear nas velocidades,

$$\phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \Gamma_{\mu}(\mathbf{q})\dot{q}^{\mu}. \quad (5.2)$$

Os coeficientes  $\Gamma_{\mu}(\mathbf{q})$  são de fácil identificação comparando as duas últimas fórmulas.

As equações de movimento, obteníveis pelo método dos multiplicadores de Lagrange [35], escrevem-se como

$$\frac{\partial L}{\partial q^{\mu}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\mu}} = \lambda \Gamma_{\mu}, \quad (5.3)$$

$$\phi(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0. \quad (5.4)$$

Acima,  $\lambda$  é o multiplicador de Lagrange e  $L$  o Lagrangiano da partícula livre,

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2, \quad (5.5)$$

sendo  $m$  a massa e  $I$  o momentum de inércia. Com este Lagrangiano e o vínculo (5.1), obtém-se

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} &= 0, & m\ddot{x} &= -\lambda \sin \theta, & m\ddot{y} &= \lambda \cos \theta, \\ \dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta &= 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

É bastante simples eliminar  $\lambda$  e  $y$  destas equações (que, por sinal, são completamente solúveis). Fazendo isto, resulta

$$\ddot{x} = -\dot{x}\dot{\theta} \tan \theta, \quad (5.7)$$

$$\ddot{\theta} = 0. \quad (5.8)$$

Definindo  $(x^1, x^2, x^3, x^4) = (x, \dot{x}, \theta, \dot{\theta})$ , transforma-se (5.7)-(5.8) num sistema de primeira ordem. Notando que  $\dot{x}^4 = 0$ , é possível reduzir a ordem deste sistema definindo  $x^4 = \omega$ , com  $\omega$  constante. O resultado destas operações é o sistema dinâmico tridimensional

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= x^2, \\ \dot{x}^2 &= -\omega x^2 \tan x^3, \\ \dot{x}^3 &= \omega. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Será aplicado o método do capítulo anterior para encontrar uma formulação de Poisson do patim livre no gelo, descrito pelas equações (5.9). Embora simples, este exemplo será tratado com todo detalhe, à guisa de ilustração. Mais tarde surgirão sistemas mais complicados, que requerem maior habilidade.

Resolvendo  $v^\mu \partial_\mu F = 0$ , verifica-se que a solução geral é  $F = F(H, \bar{H})$ , sendo  $H = x^2 \sec x^3$  e  $\bar{H} = -\omega x^1 + x^2 \tan x^3$  as constantes de movimento independentes. Será tomado

$$H = x^2 \sec x^3 \quad (5.10)$$

como o primeiro candidato a Hamiltoniano do problema. Usando este Hamiltoniano como fonte em (4.42-4.43), obtém-se

$$A = \omega \cot x^3, \quad (5.11)$$

$$B = -\omega x^2 \csc x^3. \quad (5.12)$$

Em seguida, usando a expressão de  $H$  verifica-se que uma das equações características correspondentes a (4.41) é

$$\frac{dJ}{dx^3} = (J - H) \cot x^3, \quad (5.13)$$

envolvendo apenas uma das coordenadas. A integração da equação característica leva a

$$J = x^2 \sec x^3 + \varphi(H, \bar{H}) \sin x^3, \quad (5.14)$$

sendo  $\varphi$  função arbitrária das duas constantes de movimento. As seguintes componentes básicas do tensor de Poisson são obtidas após substituir (5.14) em (4.38):

$$\begin{aligned}
J^{12} &= x^2 \sec x^3 + \varphi(H, \bar{H}) \sin x^3, \\
J^{23} &= -\omega \cos x^3, \\
J^{31} &= \sin x^3 + \frac{\varphi(H, \bar{H})}{x^2} \cos x^3.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

As demais componentes, para lembrar, advém da anti-simetria. Para encontrar a função de Casimir correspondente a esta álgebra é necessário especificar a função  $\varphi$ . Em particular, quando  $\varphi = 0$  a função de Casimir é  $C = \bar{H} = -\omega x^1 + x^2 \tan x^3$ .

Tomando como Hamiltoniano alternativo a segunda constante de movimento

$$\bar{H} = -\omega x^1 + x^2 \tan x^3, \tag{5.16}$$

encontra-se  $A = 0$  e  $B = -\omega x^2$  e

$$\bar{J} = -x^2 \tan x^3 + \bar{\varphi}(H, \bar{H}), \tag{5.17}$$

sendo  $\bar{\varphi}$  outra função arbitrária dos invariantes. Esta solução gera a estrutura de Poisson alternativa

$$\begin{aligned}
\bar{J}^{12} &= -x^2 \tan x^3 + \bar{\varphi}(H, \bar{H}), \\
\bar{J}^{23} &= -\omega \frac{\bar{\varphi}(H, \bar{H})}{x^2} \cos^2 x^3, \\
\bar{J}^{31} &= -1 + \frac{\bar{\varphi}(H, \bar{H})}{x^2} \sin x^3 \cos x^3.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Para  $\bar{\varphi} = 0$  a nova álgebra possui como função de Casimir  $\bar{C} = H$ . É bom salientar que as álgebras correspondentes a  $H$  e  $\bar{H}$  são independentes e não conectadas por transformações conformes. A invariância de escala ainda pode ser invocada para gerar famílias equivalentes de estruturas de Poisson.

Apresentamos uma solução completa e nova do problema de encontrar formulações Hamiltonianas para o patim livre no gelo, generalizando a descrição simplética obtida por Lucey e Newman [58]. Na análise mencionada, não foi feita a redução de ordem de quatro para três efetuada aqui com a definição  $x^4 = \omega$ .

## 5.2 Carga irradiando sob a Ação de um Campo Elétrico Constante

Sistemas “dissipativos” frequentemente são considerados não Hamiltonianos. Como contra-exemplo, será estudado o caso do movimento não-relativístico de uma partícula carregada irradiando. Uma descrição simplificada deste sistema é fornecida pelo *modelo de Abraham-Lorentz* [59]. A equação básica pode ser obtida após considerações de plausibilidade e tem a forma

$$m(\dot{\mathbf{v}} - \tau \ddot{\mathbf{v}}) = \mathbf{F}_{ext}. \quad (5.19)$$

Acima,  $m$  é a massa,  $\mathbf{v}$  a velocidade,  $\tau = (2e^2/3mc^3)$  um tempo característico no qual a radiação é importante no movimento, com  $e$  a carga e  $c$  a velocidade da luz. Finalmente,  $\mathbf{F}_{ext}$  é a força externa que atua sobre a carga. A equação de Abraham-Lorentz é de ordem três na posição, não sendo, portanto, do tipo Newtoniano.

Será considerado o caso em que o movimento é puramente unidimensional e em que a força externa é devida a um campo elétrico  $E$  constante,  $F_{ext} = eE$ . Neste caso, definindo  $\dot{x} = v$ , a equação de movimento toma o aspecto

$$m\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \tau \frac{d^3x}{dt^3}\right) = eE. \quad (5.20)$$

Este modelo já foi tratado no contexto da Mecânica de Nambu em [23] e [32], sendo evidente, portanto, a existência de uma descrição de Poisson subjacente. Mesmo assim, vale a pena deduzir uma estrutura de Poisson, como forma de ilustrar o uso de (4.41).

Inicialmente, deve ser reescrita a equação de terceira ordem (5.20) como um sistema de três equações de primeira ordem:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = \frac{1}{\tau} \left( z - \frac{eE}{m} \right). \quad (5.21)$$

No que segue, é feita a identificação  $(x, y, z) = (x^1, x^2, x^3)$  nos cálculos das quantidades relevantes. Como Hamiltoniano, pode ser tomada a constante de movimento

$$H = \frac{x}{\tau} + \frac{\tau eE}{2m} \left( \ln \left( z - \frac{eE}{m} \right) \right)^2 - \tau z + \left( \tau \left( z - \frac{eE}{m} \right) - y \right) \ln \left( z - \frac{eE}{m} \right). \quad (5.22)$$

Na verdade o problema é totalmente integrável, sendo que

$$\bar{H} = \frac{y}{\tau} - z - \frac{eE}{m} \ln \left( z - \frac{eE}{m} \right) \quad (5.23)$$

é outro invariante independente. Estas constantes de movimento são calculáveis diretamente das equações de evolução, apesar de seu aspecto complicado. Para  $H$ , as equações (4.42-4.43) fornecem

$$A = (z - eE/m) \ln(z - eE/m) / (\tau z \ln(z - eE/m) - y), \quad (5.24)$$

$$B = y(z - eE/m) (\tau z \ln(z - eE/m) - y). \quad (5.25)$$

Com isto, uma das equações características correspondentes a (4.41) é

$$\frac{1}{\tau} \frac{dJ}{dz} = (J \ln(z - eE/m) + y) / (\tau z \ln(z - eE/m) - y). \quad (5.26)$$

Por inspeção, conclui-se que

$$J = -\tau z \quad (5.27)$$

é uma solução particular aceitável. Não fomos hábeis o bastante para resolver completamente (4.41). A álgebra definida pela solução particular acima é dada por

$$\begin{aligned} J^{12} &= -\tau z, \\ J^{23} &= 0, \\ J^{31} &= z - eE/m. \end{aligned} \quad (5.28)$$

A função de Casimir associada é  $\bar{H}$ .

Por outro lado, utilizando  $\bar{H}$  como Hamiltoniano, encontra-se que a equação (4.41) adquire o aspecto

$$y \frac{\partial \bar{J}}{\partial x} + z \frac{\partial \bar{J}}{\partial y} + \frac{1}{\tau} \left( z - \frac{eE}{m} \right) \frac{\partial \bar{J}}{\partial z} = \frac{1}{\tau z} \left( z - \frac{eE}{m} \right) (\bar{J} - \tau y). \quad (5.29)$$

Resolver completamente esta equação parcial é uma tarefa formidável. Entretanto, uma solução particular pode ser facilmente deduzida tomando como *ansatz* a solução

$$\bar{J} = \tau y + \Lambda(z) \quad (5.30)$$

para alguma função  $\Lambda$  apropriada. Verifica-se que esta proposta acarreta a equação

$$\frac{d\Lambda}{dz} = \frac{\Lambda}{z} - \tau^2 z / (z - eE/m), \quad (5.31)$$

trivialmente solúvel. O resultado final é que

$$\bar{J} = \tau y - \tau^2 z \ln(z - eE/m) \quad (5.32)$$

é uma solução particular de (5.29). As componentes básicas do tensor de Poisson correspondente são

$$\begin{aligned}
\bar{J}^{12} &= \tau y - \tau^2 z \ln(z - eE/m), \\
\bar{J}^{23} &= -(z - eE/m), \\
\bar{J}^{31} &= \tau(z - eE/m) \ln(z - eE/m).
\end{aligned}
\tag{5.33}$$

A função de Casimir desta álgebra é o Hamiltoniano  $H$  anterior. Com isto, encerra-se a formulação bi-Hamiltoniana do sistema de uma carga irradiando enquanto executa movimento unidimensional sob a ação de um campo elétrico constante.

### 5.3 O Corpo Rígido Livre

Será retomado agora o exemplo do corpo rígido livre, que foi utilizado diversas vezes ao longo desta dissertação. Alguns aspectos novos e talvez inesperados serão apresentados na análise desta seção [60].

Para efeito de cálculo será definido  $(x_1, x_2, x_3) = (L^1, L^2, L^3)$ . As equações de Euler são

$$\begin{aligned}
\dot{L}_1 &= \frac{(I_2 - I_3)}{I_2 I_3} L_2 L_3, \\
\dot{L}_2 &= \frac{(I_3 - I_1)}{I_3 I_1} L_3 L_1, \\
\dot{L}_3 &= \frac{(I_1 - I_2)}{I_1 I_2} L_1 L_2,
\end{aligned}
\tag{5.34}$$

e admitem a energia cinética

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{(L_1)^2}{I_1} + \frac{(L_2)^2}{I_2} + \frac{(L_3)^2}{I_3} \right)
\tag{5.35}$$

e o módulo ao quadrado do momentum angular

$$\bar{H} = (L_1)^2 + (L_2)^2 + (L_3)^2 \quad (5.36)$$

como constantes de movimento independentes. Tomando a energia como Hamiltoniano encontra-se  $B = 0$  e

$$A = \frac{(I_1 - I_2) L_1 L_2}{I_1 I_2} = \frac{\dot{L}_3}{L_3}. \quad (5.37)$$

Para estes coeficientes  $A$  e  $B$ , facilmente se encontra a solução geral da equação básica (4.41). As respectivas componentes fundamentais do tensor de Poisson são dadas por

$$\begin{aligned} J^{12} &= -L_3(1 + \varphi(H, \bar{H})/I_3), \\ J^{23} &= -L_1(1 + \varphi(H, \bar{H})/I_1), \\ J^{31} &= -L_2(1 + \varphi(H, \bar{H})/I_2), \end{aligned} \quad (5.38)$$

sendo que novamente  $\varphi$  é função arbitrária dos seus argumentos. Quando  $\varphi = 0$  são recobrados os resultados usuais nos quais o momentum angular é a função de Casimir. Entretanto, o tensor de Poisson obtido aqui não é, em geral, linear nas coordenadas e portanto não corresponde a uma estrutura de Lie-Poisson. A análise apresentada aqui generaliza também os resultados obtidos em [57] e [61].

Alternativamente, utilizando o quadrado do momentum angular como Hamiltoniano obtém-se exatamente os mesmos coeficientes  $A$  e  $B$ , mas a álgebra associada é

$$\begin{aligned} \bar{J}^{12} &= L_3(1/I_3 + \bar{\varphi}(H, \bar{H})), \\ \bar{J}^{23} &= L_1(1/I_1 + \bar{\varphi}(H, \bar{H})), \\ \bar{J}^{31} &= L_2(1/I_2 + \bar{\varphi}(H, \bar{H})). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Quando  $\bar{\varphi} = 0$  a energia cinética é a função de Casimir.

A análise apresentada aqui mostra o papel dual representado pela energia cinética e o momentum angular nas estruturas de Poisson do corpo rígido livre. Quando o Hamiltoniano é a energia cinética, o momentum angular pode ser a função de Casimir e vice-versa. Finalmente, não custa lembrar que as formulações desta seção são realmente distintas, não equivalentes por uma transformação de escala.

#### 5.4 Sistema de Lorenz Reescalado

O *sistema de Lorenz* surgiu como um modelo simplificado da convecção de Rayleigh-Bénard e desde então destaca-se por possuir um atrator estranho para certas faixas de parâmetros. Vale a pena mencionar rapidamente algumas noções sobre a questão. Considera-se um fluido bidimensional entre duas placas rígidas, sujeito à gravidade. A placa inferior possui temperatura  $T_0 + \Delta T$ , maior que a temperatura  $T_0$  da placa superior. Para  $\Delta T$  muito pequeno o calor é transmitido por *condução*; o fluido é quiescente. Aumentando o gradiente de temperatura, o calor passa a ser transmitido mais significativamente por *convecção*. O processo é simples: o fluido em contato com a placa inferior adquire maior temperatura, expande-se e sobe; em contrapartida, os elementos de fluido das camadas superiores, sendo mais frios, descem.

Um tratamento completo das equações descrevendo o movimento do fluido é inacessível às técnicas existentes no momento. Um modelo simplificado é obtido por expansão de Fourier de quantidades físicas relevantes (como o campo de velocidade) e retenção das amplitudes mais significativas. Lorenz

[48] nesta linha obteve o sistema

$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= \sigma Y - \sigma X, \\
 \dot{Y} &= -Y + rX - XZ, \\
 \dot{Z} &= -bZ + XY,
 \end{aligned}
 \tag{5.40}$$

no intuito de descrever qualitativamente a turbulência em fluidos. Acima,  $(\sigma, r, b)$  são parâmetros fixos do sistema. Não será analisado o significado de cada termo nas equações de Lorenz (5.40). Unicamente se observará que o parâmetro  $r$ , proporcional ao número de Rayleigh, é relacionado com a diferença de temperatura entre as placas e regula o comportamento genérico do sistema. Quando  $r < 1$ , o fluido é quiescente e a origem é estável. Para  $r \geq 1$ , mas moderado, a origem deixa de ser estável mas existem soluções de (5.40) independentes do tempo estáveis. Isto é, há um regime de convecção estacionário. Para  $r$  suficientemente grande, genericamente ocorre comportamento irregular. O que nem sempre é mencionado é a existência de regimes integráveis para certas faixas de parâmetros  $(\sigma, r, b)$ , mesmo com  $r$  grande [53]. Na tabela abaixo, são exibidos os casos em que foi possível encontrar constantes de movimento para o sistema de Lorenz.

Exceto para valores muito especiais dos parâmetros, não há invariantes independentes do tempo. Como o sistema de Lorenz nas variáveis  $(X, Y, Z)$  é autônomo, não é possível estabelecer qualquer estrutura de Poisson global associada às equações de movimento. É necessário uma transformação de coordenadas que introduza o tempo explicitamente no campo vetorial, de modo a permitir a resolução de  $v^\mu \partial_\mu H = 0$ . Nas novas variáveis, estão sendo considerados  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  e  $H(\mathbf{x}, t)$  não autônomos.

Tab. 5.1:

Sistemas de Lorenz Integráveis

i	$\sigma$	$r$	$b$	Invariante $I_i$
1	$\forall$	$\forall$	$2\sigma$	$(X^2 - 2\sigma Z) \exp(2\sigma t)$
2	$1/3$	$\forall$	$0$	$(-rX^2 + Y^2/3 + 2XY/3 + ZX^2 - 3X^4/4) \exp(4t/3)$
3	$\forall$	$0$	$1$	$(Y^2 + Z^2) \exp(2t)$
4	$1$	$\forall$	$4$	$(4(1-r)Z + rX^2 + Y^2 - 2XY + ZX^2 - X^4/4) \exp(4t)$
5	$1$	$\forall$	$1$	$(-rX^2 + Y^2 + Z^2) \exp(2t)$
6	$\forall$	$2\sigma - 1$	$6\sigma - 1$	$[(2\sigma - 1)^2 X^2/\sigma + Y^2 + (2 - 4\sigma)XY + ZX^2 - X^2/(4\sigma)] \exp(4\sigma t)$

Inspirando-se na forma dos invariantes conhecidos [62], será utilizado o reescalonamento

$$x = X \exp(\sigma t), \quad y = Y \exp t, \quad z = Z \exp(bt). \quad (5.41)$$

Trata-se de uma transformação simples que se presta ao objetivo delineado. Observando a tabela 5.1 vê-se também que os invariantes  $I_1, I_3$  e  $I_5$  são autônomos nas novas variáveis. Aliás, a motivação original de considerar reescalonamentos como (5.41) foi a possibilidade de eliminar o tempo ao menos em algumas das constantes de movimento existentes [54]. Com isto, ao menos em algumas situações, o Hamiltoniano ou a função de Casimir poderão ser independentes do tempo.

O sistema de Lorenz reescalonado é

$$\dot{x} = \sigma y \exp((\sigma - 1)t),$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= x(r - z \exp(-bt)) \exp((1 - \sigma)t), \\ \dot{z} &= xy \exp((b - \sigma - 1)t).\end{aligned}\tag{5.42}$$

Para este sistema existe a solução global da equação (4.23), que define o Hamiltoniano . As superfícies características são

$$\begin{aligned}H &= x^2 - 2\sigma z \exp((2\sigma - b)t), \\ \bar{H} &= -\frac{rx^2}{\sigma} \exp((1 + b - 2\sigma)t) + y^2 \exp((b - 1)t) + z^2 \exp((1 - b)t).\end{aligned}\tag{5.43}$$

Candidatos a Hamiltoniano de (5.42) devem ser funções de  $H$  e  $\bar{H}$ . Quando este Hamiltoniano é autônomo, é um invariante o qual, reescrito nas variáveis originais  $(X, Y, Z)$ , fornece um invariante dependente do tempo. Desta maneira, quando  $b = 2\sigma$ ,  $H$  corresponde ao invariante  $I_1$  da tabela 5.1, quando  $b = 1$  e  $r = 0$ ,  $\bar{H}$  corresponde a  $I_3$  e quando  $\sigma = b = 1$ ,  $\bar{H}$  corresponde a  $I_5$ . Estes são os únicos casos em que é possível encontrar Hamiltonianos autônomos para (5.42).

Os cálculos para deduzir as formulações de Poisson abaixo não apresentam dificuldades e apenas serão listados os resultados definitivos. Tomando  $H$  dado em (5.43) como Hamiltoniano, a álgebra que decorre é

$$\begin{aligned}J^{12} &= \left(\frac{1}{2}z \exp(-bt) + \varphi(H, \bar{H}, t)\right) \exp((1 - \sigma)t), \\ J^{23} &= -\frac{x}{\sigma} \left(\frac{r}{2} + \varphi(H, \bar{H}, t)\right) \exp((1 + b - 3\sigma)t), \\ J^{31} &= \frac{y}{2} \exp((b - \sigma - 1)t).\end{aligned}\tag{5.45}$$

Quando  $\varphi = 0$ , a função de Casimir é  $C = \bar{H}$ .

Nas equações acima assinalou-se que a função  $\varphi$  pode depender explicitamente do tempo. Na verdade, esta asserção vale para as demais funções arbitrárias que surgiram ao longo deste capítulo. De fato, estas funções não

alteram as equações de movimento e na identidade de Jacobi o tempo entra apenas como parâmetro. Está sendo indicada somente agora a possível presença explícita do tempo em  $\varphi$  porque somente agora está sendo discutido um sistema não autônomo.

Tomando como Hamiltoniano a função  $\bar{H}$ , obtém-se

$$\begin{aligned}\bar{J}^{12} &= \left(\frac{\sigma}{2} + z\bar{\varphi}(H, \bar{H}, t)\right) \exp((\sigma - b)t), \\ \bar{J}^{23} &= -x\left(\frac{1}{2} + \frac{r}{\sigma}\bar{\varphi}(H, \bar{H}, t) \exp(t)\right) \exp(-\sigma t), \\ \bar{J}^{31} &= y\bar{\varphi}(H, \bar{H}, t) \exp((\sigma + b - 2)t).\end{aligned}\tag{5.46}$$

Quando  $\bar{\varphi} = 0$ , a função de Casimir é  $C = H$ .

Para ilustrar o método de energia-Casimir exibido na seção 3.4, será feita uma análise não-linear da estabilidade dos equilíbrios de um sistema de Lorenz reescalado. Conforme foi visto, o método de energia-Casimir supõe a existência de um número suficiente de *constantes de movimento*. Ou seja, tanto o Hamiltoniano como a correspondente função de Casimir devem ser independentes do tempo. Observando as formulações de Poisson do sistema de Lorenz reescalado, verifica-se que o único conjunto de parâmetros para os quais existem os invariantes necessários é  $(\sigma, r, b) = (1/2, 0, 1)$ . Para estes valores numéricos dos parâmetros inclusive é possível eliminar a dependência temporal explícita nas equações de movimento através da troca de variável  $t' = -2 \exp(-t/2)$ . Com isto, obtém-se

$$\begin{aligned}dx/dt' &= y/2, \\ dy/dt' &= -xz, \\ dz/dt' &= xy.\end{aligned}\tag{5.47}$$

Os pontos críticos deste sistema dinâmico são

$$\mathbf{x}_e = (0, 0, z_e), \quad \mathbf{x}_e = (x_e, 0, 0). \quad (5.48)$$

Salientamos que estes pontos críticos não correspondem a estados estacionários das equações de Lorenz originais. Como função de energia-Casimir, seja

$$H_C = \bar{H} + G(H) = y^2 + z^2 + G(x^2 - z). \quad (5.49)$$

Será estudado inicialmente o equilíbrio  $\mathbf{x}_e = (0, 0, z_e)$ , isto é, o eixo  $z$ . A primeira variação da função de energia-Casimir é

$$\delta H_C = 2y\delta y + 2z\delta z + (2x\delta x - \delta z)G', \quad (5.50)$$

sendo que a linha em  $G$  denota derivada frente a seu argumento  $H$ . No equilíbrio,

$$\delta H_C(0, 0, z_e) = (2z_e - G'(-z_e))\delta z. \quad (5.51)$$

Para que  $H_C$  tenha ponto crítico no equilíbrio, é preciso definir

$$G'(-z_e) = 2z_e. \quad (5.52)$$

A segunda variação da função de energia-Casimir é

$$\delta^2 H_C = 2(\delta y)^2 + 2(\delta z)^2 + (2x\delta x - \delta z)^2 G'' + 2(\delta x)^2 G'. \quad (5.53)$$

No equilíbrio, já levando em conta o valor de  $G'(\mathbf{x}_e)$ ,

$$\delta^2 H_C(0, 0, z_e) = 2(\delta y)^2 + (2 + G''(-z_e))(\delta z)^2 + 4z_e(\delta x)^2. \quad (5.54)$$

Tal forma quadrática é definida (no caso, positiva definida) se e somente se  $z_e > 0$ . Neste caso, basta definir  $G''(-z_e) > -2$  para demonstrar a

estabilidade não-linear. Uma das infinitas funções  $G(H)$  que satisfazem os requerimentos listados é  $G(H) = 2z_e H$ . Finalmente, resta dizer que uma análise espectral revela que os pontos no eixo  $z$  com  $z_e < 0$  são instáveis.

Passando agora à análise do segundo ponto crítico,  $\mathbf{x}_e = (x_e, 0, 0)$ , encontra-se

$$\delta H_C(x_e, 0, 0) = (2x_e \delta x - \delta z) G'(x_e^2), \quad (5.55)$$

que só se anula definindo

$$G'(x_e^2) = 0. \quad (5.56)$$

A segunda variação é (levando em conta o valor de  $G'$  no equilíbrio)

$$\delta^2 H_C(x_e, 0, 0) = 2(\delta y)^2 + 2(\delta z)^2 + (2x_e \delta x - \delta z)^2 G''(x_e^2). \quad (5.57)$$

Esta forma quadrática é definida escolhendo  $G$  de modo que  $G''(x_e^2) > 0$ . Basta tomar, por exemplo,  $G(H) = (H - x_e^2)^2$  para demonstrar a estabilidade não-linear de  $\mathbf{x}_e = (x_e, 0, 0)$ .

## 5.5 Sistema Reduzido de três Ondas Reescalado

A interação ressonante entre ondas é uma manifestação característica das propriedades não-lineares de meios dispersivos. Cada onda representa um modo de oscilação, com frequência  $\omega_i$  e vetor de onda  $\mathbf{k}(\omega_i)$ . A condição de ressonância (isto é, de troca de energia entre os modos) é que haja sincronidade entre as ondas.

Como exemplo de interação ressonante entre três ondas, pode ser citado o acoplamento de dois modos de alta frequência, correspondentes à oscilações eletrônicas, com um modo íon-acústico, de baixa frequência, em um plasma [63].

Em meios com não-linearidade quadrática nos campos, as equações básicas da interação entre três ondas são [44]

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= \sigma_1(\mathbf{a}) - a_2 a_3 \exp(-i\Delta t), \\ \dot{a}_2 &= \sigma_2(\mathbf{a}) + a_1 a_3^* \exp(i\Delta t), \\ \dot{a}_3 &= \sigma_3(\mathbf{a}) + a_1 a_2^* \exp(i\Delta t).\end{aligned}\tag{5.58}$$

Aqui,  $a_i$  é a amplitude complexa de cada onda, assumida espacialmente homogênea,  $\sigma_i$  são termos lineares descrevendo dissipação e fornecimento de energia ao meio, e a condição de sincronicidade é

$$\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \Delta = 0,\tag{5.59}$$

$$\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3 = 0.\tag{5.60}$$

Acima,  $\Delta$  é um parâmetro pequeno denotando o desvio do sincronismo.

Como primeiro exemplo, será tomada a interação entre uma onda instável  $\omega_1$  e um par amortecedor  $\omega_2$  e  $\omega_3$ . Ou seja,  $\sigma_1 = \gamma_1 a_1$  e  $\sigma_{2,3} = -\nu_{2,3} a_{2,3}$ , com os números  $\gamma_i$  reais e positivos. No caso degenerado no qual  $\nu_2 = \nu_3$ , é possível analisar com um certo detalhe o problema resultante. Após uma série de mudanças de variáveis, obtém-se o *sistema reduzido de três ondas*

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \gamma X + \delta Y + Z - 2Y^2, \\ \dot{Y} &= \gamma Y - \delta X + 2XY, \\ \dot{Z} &= -2Z(1 + X).\end{aligned}\tag{5.61}$$

Nestas equações,  $X$  e  $Y$  relacionam-se com a amplitude absoluta da onda instável e com o afastamento da ressonância,  $Z$  relaciona-se com a amplitude absoluta das ondas freadoras,  $\delta$  é proporcional a  $\Delta$ , e  $\gamma$ , a  $\gamma_1$ . Todas as variáveis envolvidas são reais agora.

A troca de energia entre os modos pode ser tanto estática (ponto estacionário estável), como periódica (ciclo limite) ou irregular (atrator estranho). À parte disso, foram escrutinados os seguintes casos integráveis do sistema de três ondas reduzido [45][46]:

Tab. 5.2:

Sistemas Reduzidos Integráveis de Três-Ondas			
$i$	$\gamma$	$\delta$	Invariante $I_i$
1	0	$\forall$	$Z(Y - \delta/2) \exp(2t)$
2	-1	$\forall$	$(X^2 + Y^2 + Z) \exp(2t)$
3	$\forall$	0	$ZY \exp((2 - \gamma)t)$
4	-2	$\forall$	$(X^2 + Y^2 + (2/\delta)Z) \exp(4t)$

É impraticável tentar deduzir estruturas Hamiltonianas nas variáveis em que o sistema está representado, devido ao caráter *genericamente* não integrável das equações de evolução. De modo semelhante ao caso do sistema de Lorenz, será feito um reescalonamento das coordenadas que autonomize os invariantes conhecidos do sistema reduzido da interação entre três ondas:

$$x = X \exp(-\gamma t), \quad y = Y \exp(-\gamma t), \quad z = Z \exp(2t). \quad (5.62)$$

Com isto, obtém-se as equações reescaloadas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \delta y - 2y^2 \exp(\gamma t), \\ \dot{y} &= -\delta x + 2xy \exp(\gamma t), \\ \dot{z} &= -2xz \exp(\gamma t). \end{aligned} \quad (5.63)$$

Para esta representação, é simples resolver  $v^\mu \partial_\mu F = 0$ . A solução geral é  $F = F(H, \bar{H})$ , sendo que

$$H = x^2 + y^2 + z \exp(-2(\gamma + 1)t), \quad (5.64)$$

$$\bar{H} = z\left(y - \frac{\delta}{2} \exp(-\gamma t)\right). \quad (5.65)$$

De passagem, note-se que quando os parâmetros do sistema forem tais que seja possível escolher  $F(H, \bar{H})$  autônomo, recobram-se os casos integráveis conhecidos. Nesta linha, quando  $\gamma = 0$ ,  $\bar{H}$  é autônomo; quando  $\gamma = -1$ ,  $H$  é autônomo; quando  $\delta = 0$ ,  $\bar{H}$  é autônomo; e, finalmente, quando  $\gamma = -2$ ,  $H + (2/\delta)\bar{H}$  é autônomo. A função  $F$  expressa nas variáveis originais resulta ser o invariante correspondente. Com isto são retomados os casos integráveis conhecidos na literatura, os quais foram deduzidos propondo um *ansatz* para a constante de movimento [45] ou por análise de Painlevé [46].

Utilizando  $H$  como Hamiltoniano, a estrutura de Poisson associada é dada por

$$\begin{aligned} J^{12} &= -y + (\delta/2) \exp(-\gamma t) + \varphi, \\ J^{23} &= 2x\varphi \exp(2(\gamma + 1)t), \\ J^{31} &= -z + 2y\varphi \exp(2(\gamma + 1)t). \end{aligned} \quad (5.66)$$

Acima, como de hábito  $\varphi = \varphi(H, \bar{H}, t)$ . Quando  $\varphi = 0$ ,  $C = \bar{H}$  é a função de Casimir.

Utilizando  $\bar{H}$  como Hamiltoniano, a estrutura de Poisson associada é dada por

$$\begin{aligned} \bar{J}^{12} &= \exp(-2(\gamma + 1)t) + \bar{\varphi}/z, \\ \bar{J}^{23} &= 2x, \end{aligned} \quad (5.67)$$

$$\bar{J}^{31} = 2y + \bar{\varphi}/(y - \frac{\delta}{2} \exp(-\gamma t)).$$

Tomando  $\bar{\varphi} = 0$ , a função de Casimir é  $\bar{C} = H$ .

Como exemplo final de aplicação do método de energia-Casimir, será estudada a estabilidade de um dos equilíbrios de um sistema (5.63) autônomo. No caso, os parâmetros do sistema são  $\delta = 0, \gamma = -1$ , e será feita a troca conveniente de parâmetro temporal  $t' = -\exp(-t)$ . O sistema resultante é

$$\begin{aligned} dx/dt' &= z - 2y^2, \\ dy/dt' &= 2xy, \\ dz/dt' &= -2xz. \end{aligned} \tag{5.68}$$

O equilíbrio a analisar é  $\mathbf{x}_e = (0, y_e, 2y_e^2)$  (há também o equilíbrio  $(x_e, 0, 0)$ , que leva a resultados menos transparentes).

Escolhendo como função de energia-Casimir

$$H_C = H + G(\bar{H}) = x^2 + y^2 + z + G(yz), \tag{5.69}$$

obtém-se que o critério da primeira variação

$$\delta H_C(0, y_e, 2y_e^2) = 0 \tag{5.70}$$

implica que  $G'(2y_e^3) = -1/y_e$ . Assim,  $y_e = 0$  está excluído. Perfazendo a segunda variação, verifica-se que  $G''(2y_e^3) = 1/(2y_e^4)$  acarreta

$$\delta^2 H_C(0, y_e, 2y_e^2) = 2(\delta x)^2 + 2 \frac{(1 + y_e^2)}{y_e^2} (\delta y)^2 + \frac{1}{2y_e^2} (\delta z)^2, \tag{5.71}$$

que é positiva definida. Basta tomar  $G(\bar{H}) = -\bar{H}/y_e + (1/4y_e^4)(\bar{H} - 2y_e^3)^2$  para satisfazer as condições obtidas. Assim, as parábolas  $x_e = 0, z_e = 2y_e^2$  são não-linearmente estáveis a menos que  $y_e = 0$ .

## 5.6 Sistema de Rabinovich Reescalado

Outro exemplo de sistema de três ondas é fornecido pelo caso em que as três ondas são amortecidas linearmente, porém duas delas são excitadas por um campo externo. Neste caso o fornecimento de energia provém de uma onda externa  $\omega_0$  ressonante com  $\omega_{1,2}$ :  $\omega_0 = \omega_1 + \omega_2$ ,  $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \Delta$ . A amplitude da onda que cede energia é mantida constante. Os termos lineares em (5.58) são dados por  $\sigma_1 = ha_2^* - \nu_1 a_1$ ,  $\sigma_2 = ha_1^* - \nu_2 a_2$ ,  $\sigma_3 = -\nu_3 a_3$ , sendo  $h$  proporcional à amplitude de  $\omega_0$ . A peculiaridade deste problema é que quando o sincronismo é exato,  $\Delta = 0$ , as amplitudes das ondas podem ser tomadas como reais. Nesta situação, encontra-se o *sistema de Rabinovich*

$$\begin{aligned}\dot{X} &= hY - \nu_1 X + YZ, \\ \dot{Y} &= hX - \nu_2 Y - XZ, \\ \dot{Z} &= -\nu_3 Z + XY.\end{aligned}\tag{5.72}$$

Acima,  $(X, Y, Z)$  são as amplitudes das ondas. Observa-se uma grande semelhança com o sistema de Lorenz, e efetivamente existe um atrator estranho semelhante ao do sistema de Lorenz.

Novamente é impraticável deduzir formulações de Poisson nas variáveis em que se apresenta o sistema. Entretanto, analisando os casos integráveis descobertos na literatura [45][46] expostos na tabela 5.3, adquire-se inspiração para um reescalamento adequado.

Tab. 5.3:

Sistemas de Rabinovich Integráveis

$i$	$h$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_3$	Invariante $I_i$
1	$\forall$	$\nu > 0$	$\nu > 0$	$2\nu > 0$	$(X^2 + Y^2 - 4hZ) \exp(2\nu t)$
2	$\forall$	$\nu > 0$	$\nu > 0$	$\nu > 0$	$(X^2 - Y^2 - 2Z^2) \exp(2\nu t)$
3	0	$\nu > 0$	$\nu > 0$	$\forall$	$(X^2 + Y^2) \exp(2\nu t)$
4	$\forall$	$\forall$	0	0	$Y^2 + (h - Z)^2$
5	$\forall$	0	$\forall$	0	$X^2 - (h + Z)^2$
6	0	$\forall$	$\nu_2 = \nu_3$	$\forall$	$(Y^2 + Z^2) \exp(2\nu_3 t)$
7	0	$\nu_1 = \nu_3$	$\forall$	$\forall$	$(X^2 - Z^2) \exp(2\nu_3 t)$

Após o reescalonamento

$$x = X \exp(\nu_1 t), \quad y = Y \exp(\nu_2 t), \quad z = Z \exp(\nu_3 t), \quad (5.73)$$

todos os invariantes na tabela 5.3 são autônomos. O sistema transformado é dado por

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y(h + z \exp(-\nu_3 t)) \exp((\nu_1 - \nu_2)t), \\ \dot{y} &= x(h - z \exp(-\nu_3 t)) \exp((\nu_2 - \nu_1)t), \\ \dot{z} &= xy \exp((\nu_3 - \nu_1 - \nu_2)t). \end{aligned} \quad (5.74)$$

Como Hamiltonianos, podem ser tomadas as funções

$$H = x^2 - 2hz \exp((2\nu_1 - \nu_3)t) - z^2 \exp(2(\nu_1 - \nu_3)t), \quad (5.75)$$

$$\bar{H} = y^2 - 2hz \exp((2\nu_2 - \nu_3)t) + z^2 \exp(2(\nu_2 - \nu_3)t). \quad (5.76)$$

De passagem, vale a pena assinalar que os invariantes catalogados na tabela 5.3 são todos dedutíveis requerendo que alguma função de  $H$  e  $\bar{H}$  seja autônoma. De fato,  $I_1 = H + \bar{H}$ ,  $I_2 = H - \bar{H}$ ,  $I_3 = H + \bar{H}$ ,  $I_4 = h^2 + \bar{H}$ ,  $I_5 = -h^2 + H$ ,  $I_6 = \bar{H}$  e  $I_7 = H$ , para as faixas de parâmetros corretas.

Construindo uma estrutura de Poisson com  $H$ , acha-se

$$\begin{aligned} J^{12} &= (1/2)(z \exp(-\nu_3 t) - h) \exp((\nu_2 - \nu_1)t) + (h + z \exp(-\nu_3 t))\varphi, \\ J^{23} &= -x\varphi \exp((\nu_3 - 2\nu_1)t), \\ J^{31} &= (y/2) \exp((\nu_3 - \nu_1 - \nu_2)t). \end{aligned} \quad (5.77)$$

Quando  $\varphi = 0$ ,  $C = \bar{H}$ .

Utilizando  $\bar{H}$ , o resultado é

$$\bar{J}^{12} = (1/2)(z \exp(-\nu_3 t) + h) \exp((\nu_1 - \nu_2)t) + (z \exp(-\nu_3 t) - h)\bar{\varphi},$$

$$\bar{J}^{23} = -(1/2)x \exp((\nu_3 - \nu_1 - \nu_2)t), \quad (5.78)$$

$$\bar{J}^{31} = y\bar{\varphi} \exp((\nu_3 - 2\nu_2)t).$$

Quando  $\bar{\varphi} = 0, \bar{C} = H$ . Com isto, encerram-se as deduções das estruturas bi-Hamiltonianas dos sistemas reescalados reduzido e de Rabinovich da interação ressonante entre três ondas.

### 5.7 Sistema de Lotka-Volterra Tridimensional

O sistema de Lotka-Volterra e alguns de seus sub-sistemas são bastante úteis como modelos de muitos processos físicos, químicos e biológicos. Na sua forma mais geral, as equações do sistema de Lotka-Volterra são dadas por

$$\dot{X}^k = X^k(a_k + b_{k\mu}X^\mu); \quad k = 1, \dots, N, \quad (5.79)$$

sendo que acima e no resto da seção não há soma sobre o índice  $k$  a menos que seja explicitamente afirmado. É instrutivo fazer uma imagem biológica de (5.79). Nesta imagem, o sistema de Lotka-Volterra é visto como um modelo simplificado da interação entre  $N$  espécies. A variável  $X^k$  representa o número de indivíduos da espécie do tipo  $k$ . Os coeficientes  $a_k$  dos termos lineares fornecem a taxa de crescimento de cada população caso não houvesse interação com as demais. Os coeficientes  $b_{kl}$ , com  $k \neq l$ , medem a cooperação ou competição entre as populações  $k$  e  $l$ . Quando  $b_{kl} > 0$  e  $b_{lk} > 0$ , há mútua cooperação entre as espécies  $k$  e  $l$ ; se  $b_{kl} > 0$  e  $b_{lk} < 0$ ,  $k$  é predadora de  $l$ ; finalmente, se  $b_{kl} < 0$  e  $b_{lk} < 0$  as espécies se destroem mutuamente. Não é fácil para alguém que não seja biólogo imaginar exemplos no mundo animal deste último caso. Entretanto, na sociedade humana algumas torcidas

organizadas são exemplos claros de populações que se auto destroem. Os últimos coeficientes a discutir são os do tipo  $b_{kk}$ . Estes correspondem aos termos de Verhulst, que representam mecanismos de auto-estabilização da população  $k$  (devido a superpopulação, entre outras possibilidades). Em resumo, o sistema de Lotka-Volterra é um modelo da interação entre espécies que leva em conta apenas efeitos quadráticos. A partir da imagem biológica que foi exposta, é possível intuir com facilidade a grande gama de processos físicos e químicos descritos por (5.79).

Nesta seção, serão considerados os sistemas de Lotka-Volterra tridimensionais, definidos na sua forma mais geral por

$$\begin{aligned}\dot{X} &= X(a_1 + b_{11}X + b_{12}Y + b_{13}Z), \\ \dot{Y} &= Y(a_2 + b_{21}X + b_{22}Y + b_{23}Z), \\ \dot{Z} &= Z(a_3 + b_{31}X + b_{32}Y + b_{33}Z),\end{aligned}\tag{5.80}$$

ou, numa notação mais compacta, por

$$\dot{X}^k = v^k = X^k(a_k + U_k),\tag{5.81}$$

sendo feita a identificação  $(X, Y, Z) = (X^1, X^2, X^3)$  e a definição

$$U_k = b_{k\mu}X^\mu.\tag{5.82}$$

Cairó e Feix [49] encontraram diversos invariantes para sistemas de Lotka-Volterra  $N$ -dimensionais. Em particular, quando  $N = 3$  e  $\det(b_{kl}) = 0$ , um destes invariantes é

$$I = H(X, Y, Z) \exp(-st) = X^\alpha Y^\beta Z^\gamma \exp(-st),\tag{5.83}$$

sendo que  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  e  $s$  são dados por

$$\alpha = b_{22}b_{31} - b_{21}b_{32}, \quad (5.84)$$

$$\beta = b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31},$$

$$\gamma = b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22},$$

$$s = a_1\alpha + a_2\beta + a_3\gamma.$$

A forma do invariante propicia dois caminhos a seguir, de acordo com o número  $s$ . Quando os parâmetros que comparecem no sistema (5.80) são tais que  $s = 0$ , é desnecessário qualquer reescalonamento das coordenadas, pois o invariante  $I$  já é autônomo. Quando  $s \neq 0$ , a constante de movimento disponível depende explicitamente do tempo. Nesta situação, é necessário transformar as variáveis independentes e construir uma formulação Hamiltoniana reescalada.

Será analisado inicialmente o caso no qual  $s = 0$ , isto é, o caso em que

$$a_1(b_{22}b_{31} - b_{21}b_{32}) + a_2(b_{11}b_{32} - b_{12}b_{31}) + a_3(b_{12}b_{21} - b_{11}b_{22}) = 0. \quad (5.85)$$

Sob esta condição, a função  $H$  definida em (5.83) é um Hamiltoniano perfeitamente aceitável. Utilizando  $H$  e (5.80) em (4.42-4.43), encontra-se

$$A = a_1 + a_2 + U_1 + U_2 + \sum_k b_{kk}X^k, \quad (5.86)$$

$$B = \frac{U}{\gamma H} (a_1b_{23} - a_2b_{13} + b_{23}U_1 - b_{13}U_2), \quad (5.87)$$

sendo que o símbolo  $U = xyz$  foi introduzido para simplificar a notação.

Dentre os sistemas tratados nesta dissertação, o sistema de Lotka-Volterra é aquele cuja formulação Hamiltoniana exige mais trabalho. Será usada uma

boa dose de intuição no que segue. Para resolver o problema de encontrar a descrição de Poisson do sistema (5.80) com  $s = 0$ , escreveremos as equações características associadas a (4.41),

$$\frac{dX^k}{X^k(a_k + U_k)} = \frac{dJ}{AJ + B}; \quad k = 1, 2, 3. \quad (5.88)$$

Após uma álgebra elementar, estas equações acarretam

$$\frac{dU}{U \sum_k (a_k + U_k)} = \frac{dJ}{AJ + B}. \quad (5.89)$$

Substituindo

$$\sum_k (a_k + U_k) = A + a_3 + (b_{31} - b_{11})X + (b_{32} - b_{22})Y, \quad (5.90)$$

na equação (5.89), encontra-se

$$\frac{dU}{U (A + a_3 + (b_{31} - b_{11})X + (b_{32} - b_{22})Y)} = \frac{dJ}{AJ + B}. \quad (5.91)$$

Serão investigadas as condições nas quais

$$J = \frac{\epsilon U}{\gamma H} \quad (5.92)$$

é uma solução particular da última equação, para alguma constante  $\epsilon$  apropriada. Substituindo esta expressão de  $J$ , bem como  $B$ , no membro direito de (5.91), obtém-se

$$\frac{dU}{U (A + a_3 + (b_{31} - b_{11})X + (b_{32} - b_{22})Y)} = \frac{dU}{U (A + ((a_1 + U_1)b_{23} - (a_2 + U_2)b_{13}) / \epsilon)}, \quad (5.93)$$

o que é uma identidade se, e somente se,

$$B' = 0, \quad (5.94)$$

sendo que

$$B' = a_1 b_{23} - a_2 b_{13} - \epsilon a_3 + \quad (5.95)$$

$$(\epsilon(b_{11} - b_{31}) + b_{23}b_{11} - b_{13}b_{21}) X + (\epsilon(b_{22} - b_{32}) + b_{23}b_{12} - b_{13}b_{22}) Y.$$

O requerimento  $B' = 0$  fornece o valor da constante  $\epsilon$  e implica (para  $X$  e  $Y$  arbitrários) em duas restrições adicionais aos coeficientes das equações de Lotka-Volterra. Isto leva a um total de *quatro* condições ( $\det(b_{kl}) = 0$ ,  $s = 0$  e às duas novas condições) sobre os *doze* parâmetros iniciais, restando *oito* parâmetros livres. Entretanto, três destes são normalizáveis por uma escolha de unidades. Restam, portanto, *cinco* parâmetros arbitrários essenciais.

A exigência  $B' = 0$  para quaisquer  $X$  e  $Y$  será analisada com maior minúcia. A igualdade  $B' = 0$  pode ser resolvida em termos de  $\epsilon$  nos casos (i)  $a_3 \neq 0$ , (ii)  $b_{31} \neq b_{11}$  e (iii)  $b_{32} \neq b_{22}$ . Cada uma destas possibilidades (as quais não são excludentes) desenvolve-se conforme:

(i) se  $a_3 \neq 0$ , então

$$\epsilon = (a_1 b_{23} - a_2 b_{13}) / a_3 \quad (5.96)$$

e também valem

$$(a_1 b_{23} - a_2 b_{13})(b_{31} - b_{11}) = a_3(b_{23}b_{11} - b_{13}b_{21}), \quad (5.97)$$

e

$$(a_1 b_{23} - a_2 b_{13})(b_{32} - b_{22}) = a_3(b_{23}b_{12} - b_{13}b_{22}); \quad (5.98)$$

(ii) se  $b_{31} \neq b_{11}$ , então

$$\epsilon = (b_{23}b_{11} - b_{13}b_{21}) / (b_{31} - b_{11}), \quad (5.99)$$

vale (5.97) e também

$$(b_{23}b_{11} - b_{13}b_{21})(b_{32} - b_{22}) = (b_{23}b_{12} - b_{13}b_{22})(b_{31} - b_{11}); \quad (5.100)$$

(iii) se  $b_{32} \neq b_{22}$ , então

$$\epsilon = (b_{23}b_{12} - b_{13}b_{22}) / (b_{32} - b_{22}) \quad (5.101)$$

e valem (5.98) e (5.100).

Para completar o cálculo substitui-se o valor conveniente de  $\epsilon$  em  $J = \epsilon U / \gamma H$ , de acordo com (i), (ii) ou (iii) (estas alternativas podem acabar por ser equivalentes). Isto determina o tensor de Poisson

$$\begin{aligned} J^{12} &= (\epsilon / \gamma) X^{1-\alpha} Y^{1-\beta} Z^{1-\gamma}, \\ J^{23} &= (1/\gamma)(U_2 - \epsilon \beta Z / \gamma) X^{-\alpha} Y^{1-\beta} Z^{1-\gamma}, \\ J^{31} &= -(1/\gamma)(U_1 - \epsilon \beta Z / \gamma) X^{1-\alpha} Y^{-\beta} Z^{1-\gamma} \end{aligned} \quad (5.102)$$

associado ao sistema de Lotka-Volterra tridimensional com  $s = 0$ .

Caso o parâmetro  $s$  presente em (5.83) não seja nulo, a descrição de Poisson recém estabelecida não será válida. Quando  $s \neq 0$ , é necessário um reescalonamento que torna o invariante  $I$  em (5.83) independente do tempo. A situação em que  $s \neq 0$  será tratada a partir de agora.

Seja o reescalonamento

$$x = X \exp(-a_1 t), \quad y = Y \exp(-a_2 t), \quad z = Z \exp(-a_3 t). \quad (5.103)$$

Nas novas variáveis, o invariante  $I$  transforma-se no Hamiltoniano

$$H(x, y, z) = x^\alpha y^\beta z^\gamma. \quad (5.104)$$

Introduziremos a notação compacta

$$u_k = \sum_l b_{kl} x^l \exp(a_l t), \quad (5.105)$$

sendo que  $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ . O campo vetorial reescalonado tem o aspecto

$$v^k = x^k u_k. \quad (5.106)$$

Com este  $v^k$  e  $H = x^\alpha y^\beta z^\gamma$ , os coeficientes  $A$  e  $B$  são

$$A = u_1 + u_2 + \sum_l b_{kk} x^k \exp(a_k t), \quad (5.107)$$

$$B = (u/\gamma H)(b_{23}u_1 - b_{13}u_2) \exp(a_3 t), \quad (5.108)$$

sendo que  $u = xyz$ .

Observa-se grande semelhança entre as equações do modelo reescalonado e do modelo nas coordenadas originais. As diferenças são a presença do tempo através de uma série de funções exponenciais e o desaparecimento dos termos lineares no campo reescalonado. Como consequência, os coeficientes  $A$  e  $B$  em (5.107-5.108) são ligeiramente diferentes dos coeficientes em (5.86-5.87). É bom lembrar que a exigência  $\det(b_{kl}) = 0$  continua presente.

Seguindo os mesmos passos dados na formulação reescalonada, encontra-se

$$\frac{du}{u \sum_k u_k} = \frac{dJ}{AJ + B} = \frac{dx^k}{v^k}. \quad (5.109)$$

Introduzindo o novo símbolo

$$\theta_{ik} = b_{ik} \exp(a_k t), \quad (5.110)$$

e usando a expressão de  $A$ , vem

$$\sum_k u_k = A + (\theta_{31} - \theta_{11})x + (\theta_{32} - \theta_{22})y, \quad (5.111)$$

que transforma (5.109) em

$$\frac{du}{u(A + (\theta_{31} - \theta_{11})x + (\theta_{32} - \theta_{22})y)} = \frac{dJ}{AJ + B}. \quad (5.112)$$

Novamente, será sugerida uma solução particular do tipo

$$J = \frac{\lambda u}{\gamma H} = \frac{\lambda}{\gamma} x^{1-\alpha} y^{1-\beta} z^{1-\gamma}, \quad (5.113)$$

sendo  $\lambda$  uma constante a ajustar. Facilmente conclui-se que esta solução é adequada se

$$B' = (\lambda(\theta_{31} - \theta_{11}) - \theta_{23}\theta_{11} + \theta_{13}\theta_{21})x + (\lambda(\theta_{32} - \theta_{22}) - \theta_{23}\theta_{12} + \theta_{13}\theta_{22})y = 0. \quad (5.114)$$

A condição sobre  $B'$  implica a restrição

$$(b_{32} - b_{22})(b_{23}b_{11} - b_{13}b_{21}) = (b_{31} - b_{11})(b_{23}b_{12} - b_{13}b_{22}) \quad (5.115)$$

e determina o valor da constante  $\lambda$ , inicialmente arbitrária,

$$\lambda = \frac{(b_{23}b_{11} - b_{13}b_{21})}{(b_{31} - b_{11})} \exp(a_3 t). \quad (5.116)$$

Isto fornece

$$J = \frac{(b_{23}b_{11} - b_{13}b_{21})}{\gamma(b_{31} - b_{11})} x^{1-\alpha} y^{1-\beta} z^{1-\gamma} \exp(a_3 t), \quad (5.117)$$

o que, por sua vez, leva à álgebra

$$\begin{aligned} J^{12} &= (\lambda/\gamma)x^{1-\alpha}y^{1-\beta}z^{1-\gamma}, \\ J^{23} &= (1/\gamma)(u_2 - \lambda\beta z/\gamma)x^{-\alpha}y^{1-\beta}z^{1-\gamma}, \\ J^{31} &= -(1/\gamma)(u_1 - \lambda\beta z/\gamma)x^{1-\alpha}y^{-\beta}z^{1-\gamma}, \end{aligned} \quad (5.118)$$

que é formalmente idêntica à álgebra apresentada em (5.102). Deve-se salientar, no entanto, algumas diferenças. A presente descrição é reescalada, com as variáveis  $u_k$  (as quais fazem o papel dos antigos  $U_k$ ) agora dependentes do tempo. Além disso, o parâmetro  $\lambda$  é diferente da constante  $\epsilon$  em (5.102).

Obteve-se uma descrição de Poisson com *sete* parâmetros arbitrários dentre os doze presentes no sistema de Lotka-Volterra. As restrições presentes são as relações  $\det(b_{kl}) = 0$  e a equação (5.115). Afora isso, três parâmetros podem ser normalizados escolhendo unidades apropriadas. Estas cinco restrições terminam por deixar livres sete coeficientes. Portanto, o formalismo reescalonado possui mais parâmetros livres do que o formalismo Hamiltoniano nas variáveis originais. Neste, apenas *cinco* parâmetros permanecem livres. As duas abordagens exibidas nesta subseção, entretanto, generalizam o trabalho pioneiro de Nutku [7], que obteve um modelo de Lotka-Volterra Hamiltoniano com *quatro* coeficientes arbitrários.

## Capítulo 6

### CONCLUSÃO

Neste trabalho considerou-se o problema de encontrar descrições de Poisson associadas a sistemas dinâmicos. Foi proposto um método dedutivo inédito para obtenção de formulações de Poisson. Essencialmente, pode-se dizer que o método consiste em encarar as identidades de Jacobi como um sistema de equações parciais para o tensor de Poisson. Tal sistema é univocamente definido em termos do sistema dinâmico e de um Hamiltoniano. Embora conceitualmente simples, a abordagem sugerida não foi analisada a fundo na literatura. De fato, comumente o tensor de Poisson é pensado como um objeto *dado*.

Aplicando a estratégia exposta nesta dissertação aos sistemas dinâmicos tridimensionais, provou-se que estes sistemas sempre admitem (localmente) formulações de Poisson. A prova consistiu em reduzir toda a questão a uma única equação diferencial parcial de primeira ordem *linear* do tipo

$$v^\mu \partial_\mu J = AJ + B. \quad (6.1)$$

Acima,  $\mathbf{v}$  é o campo vetorial associado ao sistema dinâmico sob estudo e os coeficientes  $A$  e  $B$  estão definidos em (4.42-4.43). A equação (6.1) é a identidade de Jacobi a três dimensões, expressa em função do sistema

dinâmico e de um Hamiltoniano. Sendo linear, esta equação admite infinitas soluções locais. Quando o sistema tratado é completamente integrável, é possível resolver (6.1) por quadratura.

Vale lembrar que o método deste trabalho pode ser aplicado mesmo quando a equação que define o Hamiltoniano,

$$v^\mu \partial_\mu H = 0, \quad (6.2)$$

não é completamente integrável. Isto é, basta a existência de uma única solução particular (válida ao menos numa região do espaço de fase). Graças a isto foi possível tratar o sistema de Lotka-Volterra tridimensional. O caráter dedutivo e a não exigência de integrabilidade completa são as características que distinguem a abordagem desta dissertação das demais.

A presença de funções arbitrárias na solução geral de (6.1) confere grande flexibilidade às formulações Hamiltonianas tridimensionais. A forma definitiva do tensor de Poisson pode ser com larga margem escolhida a bel-prazer. A liberdade é ainda maior se for levada em conta a invariância conforme da identidade de Jacobi a três dimensões. Esta propriedade permite gerar uma classe infinita de descrições de Poisson equivalentes a partir de uma descrição inicial. Se a formulação inicial for composta por um Hamiltoniano  $H$  e um tensor de Poisson  $\mathbf{J}$ , as formulações equivalentes compõe-se de pares  $(\bar{H}, \bar{\mathbf{J}})$ . Aqui,  $\bar{H} = F(H, C)$  é o Hamiltoniano alternativo, sendo  $F$  arbitrária e  $C$  função de Casimir de  $\mathbf{J}$ , e  $\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{J}/(\partial F/\partial H)$  é o tensor de Poisson alternativo, obtido do tensor inicial por uma transformação conforme.

Diversas formulações Hamiltonianas tridimensionais foram obtidas resolvendo a equação básica (6.1) em problemas concretos. Os resultados referentes ao patim livre no gelo, ao corpo rígido livre e ao sistema de Lotka-

Volterra tridimensional são generalizações significativas das descrições Hamiltonianas conhecidas. O sistema da carga irradiando tratado na seção 5.2 fornece um exemplo ilustrativo do funcionamento do método, e já havia sido analisado. Já as formulações de Poisson dos sistemas de Lorenz e de interações ressonantes de três ondas são totalmente novas. Nestes últimos casos, entretanto, devido ao caráter não integrável das equações de movimento, foi necessário realizar certos reescalonamentos dependentes do tempo como prelúdio da construção de estruturas Hamiltonianas. As equações de movimento transformadas e os Hamiltonianos nas novas variáveis, em geral, são explicitamente dependentes do tempo. É interessante observar que um grande número de invariantes conhecidos associados a casos específicos dos sistemas mencionados pode ser encontrado requerendo que o Hamiltoniano seja autônomo.

Seria interessante generalizar a proposta deste trabalho para dimensões maiores. Quando a dimensão excede três, a identidade de Jacobi não pode ser reduzida a uma equação linear, ao menos genericamente. Realmente, a altas dimensões obtém-se um sistema acoplado de equações parciais quasilineares, cuja análise demanda investigação. Provavelmente a presença ou não de simetrias tem influência na possibilidade de resolução do referido sistema acoplado.

Outro assunto que merece análise mais profunda é a quantização de sistemas clássicos baseada em descrições não canônicas. No caso tridimensional, foi visto que há muita arbitrariedade na escolha da representação Hamiltoniana. A partir de qual delas deve ser construída a quantização? De outra parte, as diversas quantizações são de algum modo unitariamente equiva-

lentes? Estas questões estão em aberto. Com certeza postulados de invariância podem servir como guia na escolha da representação Hamiltoniana clássica. Porém, mesmo esta observação precisa ser analisada com detalhe.

Finalizando, a unificação proporcionada pelas teorias Hamiltonianas sempre merece reverências. É realmente notável que sistemas físicos tão distintos como os tratados nesta dissertação possam ser descritos compactamente pelo mesmo tipo de formalismo. Avanços na compreensão dos sistemas dinâmicos Hamiltonianos imediatamente se refletem numa melhor compreensão da vasta gama de modelos físicos Hamiltonianos. Acreditamos que os métodos Hamiltonianos terão ainda um papel bastante relevante na Física Teórica.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] S. M. Omohundro, *Geometrical Perturbation Theory in Physics* (World Scientific, Singapura, 1986).
- [2] J. Marsden (ed.), Proceedings of the AMS-IMS-SIAM joint summer research conference in the mathematical sciences on fluids and plasmas: geometry and dynamics, Boulder, Colorado, Jul. 1983.
- [3] D. D. Holm, J. E. Marsden, T. Ratiu e A. Weinstein, Phys. Rep., **123**(1985)1.
- [4] S. A. Hojman, D. Núñez e M. P. Ryan Jr., Phys. Rev. D, **45**(1992)3523.
- [5] P. J. Olver, *Application of Lie Groups to Differential Equations (Graduate Texts in Mathematics Vol. 107)* (Springer, New York, 1986).
- [6] C. S. Gardner, J. Math. Phys., **12**(1971)1548.
- [7] Y. Nutku, Phys. Lett. A, **145**(1990)27.
- [8] Y. Nutku, J. Phys. A, **23**(1990)L1145.
- [9] D. D. Holm e K. B. Wolf, Physica D, **51**(1991)189.
- [10] V. I. Arnold, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **16**(1966)319.

- [11] R. Abraham e J. E. Marsden, *Foundations of Mechanics*, 2<sup>(a)</sup> ed. (Benjamin/Cummings, Reading-MA, 1978).
- [12] Y. Choquet-Bruhat, C. De Witt-Morette e M. Dillard-Bleick, *Analysis, Manifolds and Physics* (North-Holland, Amsterdam, 1977).
- [13] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, Heidelberg, 1978).
- [14] W. L. Burke, *Applied Differential Geometry* (Cambridge University, Cambridge, 1985).
- [15] C. W. Misner, K. S. Thorne e J. A. Wheeler, *Gravitation* (Freeman, San Francisco, 1973).
- [16] H. Flanders, *Differential Forms with Applications in the Physical Sciences* (Academic Press, New York, 1963).
- [17] R. M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics Vol. I* (Springer-Verlag, New York, 1978).
- [18] R. M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics Vol. II* (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [19] A. Weinstein, *J. Diff. Geom.*, **18**(1983)523.
- [20] E. C. G. Sudarshan e N. Mukunda, *Classical Mechanics - a Modern Perspective*, 2<sup>(a)</sup> ed. (Krieger, New York, 1983).
- [21] Y. Nambu, *Phys. Rev. D*, **7**(1973)2405.
- [22] G. J. Ruggeri, *Lett. al Nuovo Cimento*, **17**(1976)169.

- [23] M. Razavy e F. J. Kennedy, *Can. J. Phys.*, **52**(1974)1532.
- [24] G. J. Ruggeri, *Int. J. Theor. Phys.*, **12**(1975)287.
- [25] J. A. Kobussen, *Hadronic J.*, **1**(1978)966.
- [26] E. T. Whittaker, *Analytical Dynamics* (Cambridge University Press, London, 1937).
- [27] W. Pauli, *Il Nuovo Cimento*, **10**(1953)648.
- [28] J. L. Martin, *Proc. R. Soc. London A*, **251**(1959)536.
- [29] G. C. Sherry, *Int. J. Theor. Phys.*, **29**(1990)1115.
- [30] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics* (Yeshiva University, New York, 1964).
- [31] P. A. M. Dirac, *The Principles of Quantum Mechanics*, 4<sup>(a)</sup> ed. (Oxford University Press, London, 1967).
- [32] C. C. Yan, *Il Nuovo Cimento B*, **107**(1992)1239.
- [33] P. J. Morrison, *Hamiltonian Description of the Ideal Fluid*, Lectures presented at the Geophysical Fluid Dynamics Institution, Woods Hole, Mass. Published by Institute for Fusion Studies, The University of Texas, Austin, Texas - Jan/1994.
- [34] T. M. Cherry, *Trans. Cambridge Philos. Soc.*, **23**(1925)199.
- [35] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading-MA, 1980).

- [36] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems* (American Mathematical Society College Publ., New York, 1927).
- [37] P. Havas, *Acta Phys. Austr.*, **38**(1973)145.
- [38] W. Sarlet e F. Cantrijn, *Hadronic J.*, **1**(1978)101.
- [39] V. Perlick, *J. Math. Phys.*, **33**(1992)599.
- [40] W. Sarlet e F. Cantrijn, *Hadronic J.*, **1**(1978)1497.
- [41] F. González-Gascón, *Phys. Lett. A*, **75**(1980)455.
- [42] J. A. Kobussen, *Acta Phys. Aust.*, **51**(1979)293.
- [43] L. Cairó e M. R. Feix, *J. Phys. A*, **25**(1992)L1287.
- [44] A. S. Pikovski e M. I. Rabinovich, *Math. Phys. Rev.*, **2**(1981)165.
- [45] H. J. Giacomini, C. E. Repeto e O. P. Zandron, *J. Phys. A*, **24**(1991)4567.
- [46] T. C. Bountis, A. Ramani, B. Grammaticos e B. Dorizzi, *Physica A*, **128**(1984)268.
- [47] O. E. Rössler, *Phys. Lett. A*, **57**(1976)397.
- [48] E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.*, **20**(1963)130.
- [49] L. Cairó e M. R. Feix, *J. Math. Phys.*, **33**(1992)2440.
- [50] W. E. Lamb Jr., *Phys. Rev. A*, **134**(1964)1429.
- [51] M. Puta, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **318**(1994)679.

- [52] T. Rikitake, Proc. Camb. Phys. Soc., **54**(1957)89.
- [53] M. Kuś, J. Phys. A, **16**(1983)L689.
- [54] J. Goedert, F. Haas, D. Hua, M. R. Feix e L. Cairó, *Generalized Hamiltonian Structures for Systems in three Dimensions with a Rescalable Constant of the Motion*, aceito para publicação, J. Phys. A..
- [55] E. P. Wigner, Phys. Rev., **77**(1950)711.
- [56] M. Henneaux, Ann. Phys., **140**(1982)45.
- [57] H. Gümral e Y. Nutku, J. Math. Phys., **34**(1993)5691.
- [58] C. A. Lucey e E. T. Newman, J. Math. Phys., **29**(1988)2430.
- [59] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics* (John Wiley and Sons, New York, 1962).
- [60] F. Haas e J. Goedert, *On the Construction of Generalized Hamiltonian Structure for 3D Dynamical Systems*, submetido para publicação, Phys. Lett. A.
- [61] S. Hojman , J. Phys. A, **24**(1990)L249.
- [62] F. Haas e J. Goedert, *Hamiltonian Structure for Rescaled Integrable Lorenz Systems*, II Encontro Brasileiro de Física dos Plasmas, Proceedings, pag. 118-121, Serra Negra, SP, Out. 1993.
- [63] R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory* (Academic Press, New York, 1972).